Двадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 20–28.09.2025
Премьер-лига. 1 тур. 22.09.2025

1. Пусть ABC — остроугольный треугольник, такой что $\angle BAC = 59^\circ$. Пусть X — точка внутри треугольника ABC, такая что для любых точек P и Q на стороне BC $\angle PXQ \geqslant \angle PAQ$. Найдите максимальное возможное значение угла BXC.

2. Назовём четвёрку неотрицательных вещественных чисел (a, b, c, d) *сбалансированной*, если $a+b+c+d = a^2+b^2+c^2+d^2$. Найдите все положительные числа x такие, что $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \geqslant 0$ для каждой сбалансированной четвёрки (a, b, c, d).

3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Касательные к описанной окружности ABC в точках B и C пересекаются в точке D. Прямая, проходящая через B, параллельно AD пересекает луч MA в точке Q. Точка P диаметрально противоположна точке Q на описанной окружности треугольника BQM. Докажите, что $PA = PB$.

4. У Коли есть 100 сундуков с сокровищами, 98 из которых содержат золото, а 2 — серебро. Известно, что сундуки, содержащие одинаковые металлы, весят одинаково, а сундук с золотом тяжелее сундука с серебром. У Коли есть весы, которые позволяют ему сравнивать вес двух сундуков с сокровищами, чтобы определить, какой из них тяжелее, или выяснить, что они весят одинаково. За какое наименьшее число взвешиваний он гарантированно сможет определить, какие 2 сундука содержат серебро?

5. Можно ли записать по кругу 50 многочленов с вещественными коэффициентами так, что графики двух из этих многочленов пересекаются тогда и только тогда, когда эти многочлены записаны рядом?

6. Подмножество S натуральных чисел называется *саксонским*, если для каждых трех различных элементов $a, b, c \in S$ число $ab + c$ является точным квадратом. Докажите, что любое саксонское множество является конечным, и определите максимально возможное количество элементов, которое может иметь саксонское множество.

7. В полном графе с 2025 вершинами каждое ребро окрашено в один из цветов r_1, r_2 или r_3. Для каждого $i = 1, 2, 3$ все вершины графа можно разделить на a_i групп таким образом, что любые две вершины, соединенные ребром цвета r_i, находятся в разных группах. Найдите минимально возможное значение $a_1 + a_2 + a_3$.

8. Соня расставила по кругу 100 красных и 200 синих жемчужин. Назовем *блоком* набор одноцветных жемчужин, стоящих в кругу подряд, ограниченный с обоих концов жемчужинами другого цвета. Раз в минуту все блоки, соседствующие с блоками с хотя бы вдвое большим размером, перекрашиваются в другой цвет. Может ли Соня придумать такую начальную расстановку, чтобы в какой-то момент все жемчужины стали красными?