

Старт-лига. Первый тур. 22.09.2025

1. На сторонах AB , BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A$. Известно, что для каждой из выбранных точек сумма расстояний от неё до сторон треугольника равна длине соответствующей медианы треугольника (например, для точки A_1 длине медианы, проведенной из вершины A). Найдите все треугольники ABC , для которых это условие может выполняться.

2. Имеется фигура, состоящая из одинаковых клеток. Оказалось, что ладья может пройти с любой клетки на любую другую не более, чем за N ходов. При каких N можно утверждать, что существует горизонтальная или вертикальная линия, на которую ладья из любой клетки может попасть за один ход?

3. Существуют ли натуральные a и b такие, что $\frac{a^3 - 1}{b^3 + 1} = \frac{2022}{2025}$?

4. На кастинг в волонтеры ЮМТ пришли 60 студентов. Сергей Евгеньевич предложил каждому студенту ровно одно задание из списка. Известно, что из любых десяти студентов по крайней мере трое получили одинаковое задание. При каком наибольшем k можно утверждать, что среди студентов обязательно найдутся k , которые получили одно и то же задание?

5. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL , медиана BM и высота CH . Оказалось, что середины отрезков MH и AL совпадают. Найдите углы треугольника ABC .

6. Натуральное число называется *морским*, если произведение двух самых маленьких собственных делителей равно 12 или 15, а сумма двух самых больших собственных делителей равна 360. Найдите все *морские* числа. (Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше этого числа.)

7. У Влада есть 100 сундуков с сокровищами, 98 из которых содержат золото, а 2 — серебро. Известно, что сундуки, содержащие одинаковые металлы, весят одинаково, а сундук с золотом тяжелее сундука с серебром. У Влада есть весы, которые позволяют ему сравнивать вес двух сундуков с сокровищами, чтобы определить, какой из них тяжелее, или выяснить, что они весят одинаково. Сможет ли он менее чем за 70 взвешиваний гарантированно определить, какие 2 сундука содержат серебро?

8. Существуют ли три различных натуральных числа a, b, c , таких, что числа $ab + c$, $bc + a$ и $ca + b$ — точные квадраты?