XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Тур 1. Юниор-лига. 22.09.2025.

1. Дан граф такой, что в каждом его подграфе есть вершина степени не больше $2k-1$. Докажите, что все вершины можно разбить на k подграфов без циклов.

2. У Коли есть 100 сундуков с сокровищами, 98 из которых содержат золото, а 2 — серебро. Известно, что сундуки, содержащие одинаковые металлы, весят одинаково, а сундук с золотом тяжелее сундука с серебром. У Коли есть весы, которые позволяют ему сравнивать вес двух сундуков с сокровищами, чтобы определить, какой из них тяжелее, или выяснить, что они весят одинаково. За какое наименьшее число взвешиваний Коля гарантированно сможет определить, какие 2 сундука содержат серебро?

3. Дан прямоугольник $ABCD$. Циркулем и линейкой постройте какую-нибудь точку P строго внутри прямоугольника такую, что $AP \cdot CP + BP \cdot DP = S(ABCD)$.

4. Соня расставила по кругу 100 красных и 200 синих жемчужин. Назовем *блоком* набор одноцветных жемчужин, стоящих в кругу подряд, ограниченный с обоих концов жемчужинами другого цвета. Раз в минуту каждый блок, соседствующий с блоком хотя бы вдвое большего размера, перекрашивается в другой цвет. Может ли Соня придумать такую начальную расстановку, чтобы в какой-то момент все жемчужины стали красными?

5. Существуют ли натуральные a и b такие, что
$$\frac{a^3-1}{b^3+1} = \frac{2022}{2025}\,?$$

6. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH. Точка M — середина стороны AC. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Отрезки BO и HM пересекаются в точке P. Докажите, что BO и AP перпендикулярны.

7. Пусть $S(k)$ — сумма цифр натурального числа k. Найдите все такие натуральные n, что $S(n^2) = 2n-1$.

8. На доске нарисован цикл на $2n$ вершинах. Вася хочет расставить в вершинах этого цикла $2n$ квадратных трёхчленов (с вещественными коэффициентами) так, чтобы графики любых двух трёхчленов пересекались тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины в цикле соединены ребром. При каких n Вася сможет добиться желаемого?