XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Второй тур. Гранд. 23.09.2025.

1. Дан связный граф. Пусть α — его число независимости (т.е. максимальный размер подмножества вершин, попарно не смежных друг с другом). Пусть диаметр этого графа (т.е. максимум среди расстояний между парами вершин) равен $2\alpha - 1$. Докажите, что все вершины графа можно единственным образом разбить на α непустых подмножеств так, чтобы в каждом из этих подмножеств все вершины были попарно смежные.
   (*Расстояние* между двумя вершинами X и Y в графе — это число ребер в кратчайшем пути между X и Y.)

2. У Алисы есть секретный многочлен $P(x)$ степени ровно 2025, все коэффициенты которого – нули и единицы. Боб хочет узнать многочлен Алисы. Он может записать натуральное число k, и Алиса скажет, является ли это k значением многочлена в некоторой натуральной точке. Какого наименьшего количества вопросов Бобу заведомо хватит, чтобы узнать многочлен Алисы?

3. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. Прямые, симметричные AC относительно BA и BC, пересекают прямую, проходязую через B параллельно AC, в точках D и E соответственно. Пусть I_1, I_2 — инцентры треугольников ADB, CEB соответственно. Докажите, что окружность (I_1BI_2) проходит через середину меньшей дуги AC окружности (ABC). (Георгий Кузнецов)

4. Дан треугольник ABC с углом $\angle ABC = 45^\circ$, его высоты, проведенные из вершин A и C, пересекают окружность (ABC) в точках E и D. Пусть G — пересечение касательных к (ABC), проведенных в точках A иC. Докажите, что ортоцентр треугольника DEG лежит на AC. (Дмитрий Крохалев, Георгий Кузнецов, Александр Коваленко)

5. Пусть $(a_n)_{n\geq 1}$ — бесконечная последовательность натуральных чисел, заданная соотношением
$$a_{n+1} = (n+1)\,(a_n - n + 1)$$
   при каждом натуральном n. Для каждого значения a_1 найдите наибольшее натуральное k такое, что НОД$(a_i, a_{i+1}) = k$ при некотором натуральном $i \geq 2$.

6. Несколько студентов – математиков и физиков – стоят в клетках таблицы $n \times n$ (в одной клетке может стоять любое количество студентов, в том числе 0). Каждый студент вычислил долю студентов своей специальности в своей строке и долю студентов своей специальности в своём столбце, а потом записал на доску сумму полученных чисел (себя студент учитывает). Докажите, что произведение всех записанных чисел не меньше 1.

7. Ана и Бето играют на доске, на которой написаны целые числа 1, 2, …, 2024. Каждый ход Ана выбирает три числа a, b, c, написанных на доске, затем Бето стирает их и пишет одно из следующих чисел: $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$. Игра заканчивается, когда на доске остаются только два числа. Если сумма оставшихся двух чисел кратна 3, выигрывает Бето. В противном случае выигрывает Ана. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

8. Найдите все натуральные числа n такие, что существует выпуклый n-угольник, который можно разрезать на конечное число (не обязательно равных) треугольников, у каждого из которых углы равны 15°, 75° и 90°.

9. Назовём пару натуральных чисел (a, b) *клёвой*, если выполняется равенство $(a+b)^2 = \overline{ab}$ (где $\overline{ab}$ — число, полученное приписыванием десятичной записи числа b справа к десятичной записи числа a). (Например, пара $(20, 25)$ — клёвая, ведь $(20+25)^2 = 2025$.) Докажите, что клёвых пар бесконечно много. (Лев Батагов)

10. По окружности расставлено $2n+1$ точек, некоторые из которых покрашены в зелёный цвет. Набор из $n+1$ точек, идущих подряд, назовём *хорошим*, если он содержит больше половины всех зелёных точек. Докажите, что количество хороших наборов не меньше $n+1$ тогда и только тогда, когда количество зелёных точек нечётно.