Двадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 20–28.09.2025
Премьер-лига. 2 тур. 23.09.2025

1. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Пусть P и Q – точки на прямой BC, отличные от D, такие что $PB = BD$ и $QC = CD$. Докажите, что описанные окружности треугольников PCE и QBF и окружность ω проходят через одну и ту же точку.

2. В каждой вершине пятиугольника записано некоторое число, меньшее 1000, причём сумма всех этих чисел равна нулю. Каждое число заменяется полусуммой соседних чисел, и эта операция проводится 100 раз. Докажите, что после этого каждое из чисел будет меньше 1.

3. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точка P внутри треугольника такова, что $\angle PBA = 2\angle PAB$ и $\angle PCA = 2\angle PAC$. Докажите, что $\angle APO = |\angle PAC - \angle PAB|$.

4. Пусть $(a_n)_{n\geqslant 1}$ – бесконечная последовательность натуральных чисел, заданная соотношением

$$a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1)$$

при каждом натуральном n. Для каждого значения a_1 найдите наибольшее натуральное k такое, что НОД$(a_i, a_{i+1}) = k$ при некотором натуральном $i \geqslant 2$.

5. Найдите все пары натуральных чисел m и n такие, что сумма любого натурального делителя m и любого натурального делителя n имеет с mn общий делитель, больший 1.

6. У Алисы есть секретный многочлен $P(x)$ степени 2025, все коэффициенты которого – нули и единицы. Боб хочет найти многочлен Алисы, но он может задавать только вопросы вида “Является ли данное натуральное k значением многочлена $P(x)$ в натуральной точке?” Какого наименьшего количества вопросов Бобу заведомо хватит, чтобы найти многочлен Алисы?

7. Несколько студентов – математиков и физиков стоят в клетках таблицы $n \times n$ (в одной клетке может стоять любое количество студентов, в том числе 0). Каждый студент вычислил долю студентов своей специальности в своей строке и долю студентов своей специальности в своём столбце, а потом записал на доску сумму полученных чисел (себя студент учитывает). Докажите, что произведение всех записанных чисел не меньше 1.

8. По окружности расставлено $2n+1$ точек, некоторые из которых покрашены в зелёный цвет. Набор из $n+1$ точек, идущих подряд, назовём *хорошим*, если он содержит больше половины всех зелёных точек. Докажите, что количество хороших наборов не меньше $n+1$ тогда и только тогда, когда количество зелёных точек нечётно.