XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига. Второй тур. 23.09.2025

1. По окружности расставлено $2n+1$ точек, некоторые из которых покрашены в зелёный цвет. Набор из $n+1$ точек, идущих подряд, назовём *хорошим*, если он содержит больше половины всех зелёных точек. Докажите, что количество хороших наборов не меньше $n+1$ тогда и только тогда, когда количество зелёных точек нечётно.

2. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность с центром I, M — середина гипотенузы AB. Найдите длину гипотенузы, если $IM=1$, а угол BIM прямой.

3. Сумма восьми натуральных чисел равна 2025. Какое наименьшее значение может принимать их НОК?

4. Натуральные числа от 1 до N расположены по кругу таким образом, что среди положительных разностей рядом стоящих чисел оказалось наибольшее возможное количество различных значений. Сколько именно?

5. В автобусе из Морской звезды в Орлёнок ехали рыцари и лжецы, их было поровну (рыцари всегда говорят правду, лжецы — ложь). Оргкомитет задавал им перед посадкой в автобус два вопроса: «Сколько среди вас рыцарей?» и «Сколько среди вас лжецов?». Вариантов ответов оказалось всего четыре: «Не менее пяти», «Не менее девяти», «Не более шести» и «Не более десяти». Сколько человек могли ехать в автобусе?

6. Дан угол $\angle ABC$. Лучи l_1 и l_2, выходящие из точки B, делят данный угол на три равных. На луче l_1 выбрана точка D так, что $AD||BC$. Оказалось, что луч l_2 делит CD пополам, и AC делит угол BAD пополам. Найти углы четырёхугольника $ABCD$.

7. Докажите, что для любых положительных чисел x, y, z выполняется неравенство
$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z} \geq 3(2x-y-3z).$$

8. В каждой вершине пятиугольника записано некоторое число, меньшее 10000, причём сумма всех этих чисел равна нулю. За одну операцию каждое из чисел заменяется полусуммой соседних чисел. Эта операция проводится 100 раз. Докажите, что после этого каждое из чисел будет меньше 1.