XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Тур 2. Юниор-лига. 23.09.2025.

1. На плоскости отмечена область M такая, что любые две точки из неё можно соединить ломаной, каждая точка которой принадлежит M. Известно, что среди любых k точек, лежащих в области M, найдутся две такие, что отрезок между ними лежит внутри M. Докажите, что любые две точки из M можно соединить ломаной, состоящей из не более $2k-3$ звеньев, каждая точка которой также принадлежит M.

2. В каждой вершине пятиугольника записано некоторое число, меньшее 10000, причём сумма всех этих чисел равна нулю. За одну операцию каждое из чисел заменяется полусуммой соседних чисел. Эта операция проводится 100 раз. Докажите, что после этого каждое из чисел будет меньше 1.

3. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка P, лежащая в разных полуплоскостях относительно BC с точкой A, такова, что $\angle BPC = 30^\circ$. Точка Q — проекция точки P на прямую AC. Из точки A проведена касательная AT (T — точка касания) к окружности с центром Q и радиусом QC. Докажите, что $PB = AT$.

4. Решите систему:
$$\begin{cases} a_1^2 + a_1 - 1 = a_2, \\ a_2^2 + a_2 - 1 = a_3, \\ \dots \\ a_n^2 + a_n - 1 = a_1. \end{cases}$$

5. Пусть для $(a_n)_{n\geq 1}$ — бесконечная последовательность натуральных чисел, заданная соотношением
$$a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1)$$
при каждом натуральном n. Для каждого значения a_1 найдите наибольшее натуральное k такое, что НОД$(a_i, a_{i+1}) = k$ при некотором натуральном $i \geq 2$.

6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. К ним проведена общая касательная ST (S — точка касания с ω_1, T — с ω_2). Прямая, проходящая через точку S параллельно BT, пересекает ω_1 в точке P. Прямая, проходящая через точку T параллельно SB, пересекает ω_2 в точке Q. Докажите, что
$$\frac{AP}{AQ} = \frac{BS^2}{BT^2}\,.$$

7. Найдите все натуральные $n \geq 1$ такие, что $2^n - 1$ имет ровно n различных натуральных делителей.

8. По окружности расставлено $2n+1$ точек, некоторые из которых покрашены в зелёный цвет. Набор из $n+1$ точек, идущих подряд, назовём *хорошим*, если он содержит больше половины всех зелёных точек. Докажите, что количество хороших наборов не меньше $n+1$ тогда и только тогда, когда количество зелёных точек нечётно.