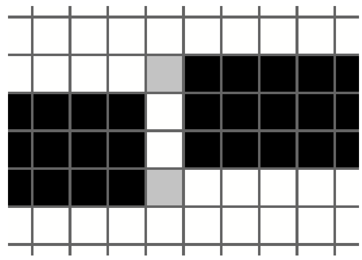
XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Третий тур. Гранд. 25.09.2025.

1. Дано натуральное число a. Натуральное k назовём *подходящим*, если $k!+a$ – точный квадрат. Докажите, что при каждом натуральном $n \geq a$ среди натуральных чисел от 1 до n^2 найдётся не менее $n-a$ **не**подходящих.

2. Дана таблица $n \times n$, строки и столбцы которой пронумерованы от 1 до n. Клетка в строке i и столбце j обозначается как (i, j). Множество A клеток называется *хорошим*, если для любых двух его клеток (x_1, y) и (x_2, y) всякая клетка (u, v), удовлетворяющая условию $x_1 < u \leq x_2, v < y$ или условию $x_1 \leq u < x_2, v > y$, не входит в A. На рисунке серые клетки хорошего множества A запрещают чёрным в нём находиться. Определите минимальное количество хороших множеств, покрывающих всю таблицу.



3. Длины сторон треугольника равны a, b, c. Докажите неравенство
$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6\ .$$

4. Клетки бесконечной клетчатой доски раскрашены в красный, синий и белый цвета так, что у любой клетки K есть соседи (по стороне) обоих цветов, отличных от цвета клетки K. При каком наибольшем вещественном $\lambda > 0$ может выполняться условие: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное N, что для любого $n > N$ в любом клетчатом квадрате размера $n \times n$ количество красных клеток не меньше $(\lambda - \varepsilon)n^2$?

5. Дан остроугольный треугольник ABC с описанной окружностью ω и ортоцентром H. Пусть M – середина большей дуги BC окружности (ABC). Пусть E — точка пересечения прямых CM и BH, F — точка пересечения прямых BM и CH, K — точка пересечения прямых BC и EF. Пусть L – основание перпендикуляра из M на KH. Докажите, что отрезки AH и AL равны.

6. Для какого наибольшего натурального числа n, взаимно простого с 10, в десятичной записи дроби a/n ни при каком натуральном a, меньшем n, после запятой нет двух одинаковых цифр, стоящих подряд?

7. Числа $1, 2, \ldots, 2025$ разбили на (непустые) группы, в каждой группе посчитали среднее арифметическое чисел и для полученных средних снова нашли их среднее арифметическое. Какое наименьшее число могли получить?

8. Дано натуральное n. Найдите наибольшее количество рёбер в графе на n вершинах, если в нём каждые два простых цикла пересекаются (хотя бы по одной вершине). (В. Дольников)

9. В треугольнике ABC отмечены центры вписанной и описанной окружностей — точки I и O соответственно. Точка S на окружности (ABC) такова, что угол ASI — прямой. Перпендикуляр из точки I на BC пересекает окружность (AIO) и прямую SO в точках K и L соответственно (K отлична от I). Докажите, что окружность (OKL) касается биссектрисы угла BAC. (Д. Игнатьев)

10. Множество S вещественных чисел таково, что если $x \in S$, то и $1+\dfrac{1}{x} \in S$. Возможно ли, что S содержит ровно 2025 элементов?