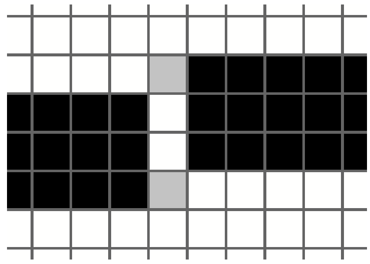
Двадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок 20–28.09.2025
Премьер-лига. 3 тур. 25.09.2025

1. Строки и столбцы таблицы $n \times n$ пронумерованы от 1 до n; клетка в строке i и столбце j обозначается (i, j). Множество A клеток называется *хорошим*, если для любых двух клеток $(x_1, y), (x_2, y)$ в A клетки (u, v), удовлетворяющие условию $x_1 < u \leqslant x_2, v < y$ или $x_1 \leqslant u < x_2, v > y$, не входят в A. На какое наименьшее количество хороших множеств можно разбить все клетки таблицы?



2. Точка E лежит на диагонали AC четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O. Известно, что $AB > BC$ и $AE < EC$. Прямая ℓ проходит через E перпендикулярно к AC и пересекает описанные окружности треугольников AED, BED, CED в точках X, Y, Z соответственно так, что точки E, Y, Z, X лежат на l в данном порядке. Докажите, что если $AX = BY = CZ$, то прямые BD и OY пересекаются в центре вписанной окружности треугольника ABC.

3. Множество S вещественных чисел таково, что если $x \in S$, то и $1+\frac{1}{x} \in S$. Возможно ли, что S содержит ровно 2025 элементов?

4. Рассмотрим три окружности с центрами в точках A, B, C, не лежащих на одной прямой, и радиусами

$$\sqrt{AB \cdot AC}, \sqrt{BC \cdot BA}, \sqrt{CA \cdot CB}$$

соответственно. Докажите, что если у этих окружностей есть шесть точек попарного пересечения, то эти точки лежат на двух концентрических окружностях.

5. Дано натуральное число a. Натуральное k назовём *подходящим*, если $k! + a$ – точный квадрат. Докажите, что при каждом натуральном $n \geqslant a$ среди натуральных чисел от 1 до n^2 найдётся не менее $n - a$ неподходящих.

6. В точках A_1, A_2, $\ldots$, A_{1404}, разбивающих окружность на 1404 равных части, расставлены все натуральные числа от 1 до 1404. Если среди двух чисел, стоящих в соседних точках, большее ближе к A_1, эти два числа можно поменять местами (расстояние измеряется по более короткой дуге окружности). Сколько существует начальных расстановок, из которых такими операциями можно получить расстановку, в которой в точках A_1, A_2, $\ldots$, A_{1404} стоят числа 1, 2, $\ldots$, 1404 соответственно?

7. Длины сторон треугольника равны a, b, c. Докажите неравенство

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca} + \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geqslant 6\ .$$

8. Для какого наибольшего натурального числа n, взаимно простого с 10, в десятичной записи дроби a/n ни при каком натуральном a, меньшем n, после запятой нет двух одинаковых цифр, стоящих подряд?