

Старт-лига. Третий тур. 25.09.2025

1. Клетки доски 5×5 покрашены в 3 цвета: красный, зелёный и синий. У каждой красной клетки есть соседняя по стороне зелёная клетка, у каждой зелёной — синяя, а у каждой синей — красная. Какое наименьшее количество клеток может быть красного цвета?

2. Серёжа выписал на доску k чисел, дающих в сумме 2025. Саша посчитала у каждого числа его сумму цифр и записала результаты в ряд на вторую доску. Оказалось, что в этом ряду каждое число, кроме первого, на одно и то же натуральное число больше предыдущего. При каком наибольшем k такое могло быть?

3. Даны два прямоугольных треугольника ABC и ADC , вершины B и D прямых углов которых лежат по одну сторону от прямой AC . Пусть A_1 и C_1 — проекции точек A и C на прямую BD . Докажите, что $A_1B = C_1D$.

4. Длины сторон треугольника — натуральные числа a , b и c . Докажите неравенство

$$\frac{a+1}{b+c} + \frac{b+1}{c+a} + \frac{c+1}{a+b} \leq 3$$

5. На уроке геометрии Петя вписал в треугольник ABC окружность ω , касающуюся стороны AC в точке T . А Маша вписала в треугольники ABT и CBT окружности с центрами O_1 и O_2 . И «обнаружила», что O_1 и O_2 лежат на ω . Могло ли такое быть?

6. Даны натуральные a , b и c . Известно, что $\text{НОД}(a, b, c) = 1$. Докажите, что $\text{НОД}(a^2 + bc, b^2 + ac, c^2 + ab)$ является степенью двойки.

7. В кружок записалось несколько мальчиков и девочек, всего не менее пяти человек. У каждых трёх кружковцев одного пола ровно один общий знакомый другого пола, а у каждых двух кружковцев одного пола — ровно два общих знакомых другого пола. Сколько всего кружковцев?

8. На парковке у автобуса встали в круг 18 участников ЮМТ — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, лжецы — лжёт). Каждый из них сказал: «Среди участников, стоящих через 2 человека от меня, есть лжец». Сколько рыцарей могло быть среди них?