

Тур 3. Юниор-лига. 25.09.2025.

1. Дан граф на n вершинах, все циклы в котором имеют непустое пересечение по вершинам и длину не менее 5. Докажите, что в этом графе не более, чем $2n - 1$ ребро.
2. Значения квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами в целых точках x_1, x_2 и x_3 делятся на натуральное число n . Докажите, что $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ кратно n .
3. Дан неравносторонний прямоугольный треугольник ABC . На катетах AC и BC выбраны точки K и T соответственно, а на гипотенузе — точка L так, что $CKLT$ — квадрат. Прямые BK и AT пересекаются в точке P , а прямые CP и AB — в точке D . Какие значения может принимать угол TDL ?
4. Длины сторон треугольника равны a, b, c . Докажите неравенство

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca} + \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6.$$

5. Каждая клетка доски 5×5 покрашена в один из трёх цветов: красный, зелёный или синий. Причём у каждой красной клетки есть соседняя по стороне зелёная клетка, у каждой зелёной — синяя, а у каждой синей — красная. Какое наименьшее количество клеток может быть красного цвета?
6. Изначально на доске написан приведённый квадратный трёхчлен с двумя натуральными корнями. Раз в минуту Саша выполняет следующую операцию: если на доске написан квадратный трёхчлен с корнями $x_1 > x_2 > 0$ и дискриминантом $D > 0$, то Саша заменяет его на $x^2 - \frac{x_1}{x_2}x + \frac{\sqrt{D}}{x_2}$, иначе Саша прекращает действия. Верно ли, что рано или поздно Саша остановится?
7. Рассмотрим три окружности с центрами в точках A, B, C , не лежащих на одной прямой, и радиусами

$$\sqrt{AB \cdot AC}, \sqrt{BC \cdot BA}, \sqrt{CA \cdot CB}$$

соответственно. Докажите, что если у этих окружностей есть шесть точек попарного пересечения, то эти точки (попарного пересечения) лежат на двух концентрических окружностях.

8. Дано натуральное число a . Натуральное число k назовём *подходящим*, если $k! + a$ — точный квадрат. Докажите, что при каждом натуральном $n \geq a$ среди натуральных чисел от 1 до n^2 найдётся не менее $n - a$ неподходящих.