XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Полуфинал. Гранд. 26.09.2025.

1. В конкурсе “Робовидение” участвуют n ИИ-певцов и $\frac{n(n-1)}{2}$ зрителей. Каждый зритель имеет свой список певцов от лучшего к худшему, который он рассказывает ИИ-ассистенту. После этого ведущий задаёт каждому зрителю один вопрос “Кто поёт лучше: A или B?”. О каждой паре певцов A, B он должен спросить по одному разу. В итоге ИИ составляет общий рейтинг певцов. Цель — сделать так, чтобы ответ каждого зрителя совпадал с результатами из этого рейтинга. Может ли ИИ, подсказав “правильные” вопросы ведущему, гарантированно добиться этой цели? (М. Дидин)

2. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Максим заполняет клетки таблицы 100×100 числами из $\{1, 2, \dots, k\}$ так, чтобы сумма всех чисел в таблице была чётной. После этого Илья разрезает таблицу на два куска (каждый кусок — связное множество клеток относительно соседства по стороне) так, чтобы суммы чисел в этих кусках были равны. Найдите все натуральные k, для которых Илья сможет это сделать независимо от того, как именно Максим заполнил таблицу. (М. Дидин)

3. Заяц и Волк играют в игру. Волк рисует граф, содержащей более одной вершины, и красит его рёбра в красный и синий цвет. После этого Заяц ставит в какие-то две вершины красную и синюю фишку и выбирает, какая из них достанется ему, а какая — Волку. После этого Заяц и Волк ходят по очереди, за ход игрок может передвинуть свою фишку по ребру цвета этой фишки или пропустить ход. Волк выигрывает, если после нескольких ходов фишки оказались в одной вершине. Есть ли у него выигрышная стратегия? (М.Дидин)

4. В посёлке Завидном живёт 2026 человек, у каждого есть положительный доход. Некоторые пары жителей знакомы, у каждого есть хотя бы один знакомый. Уровень зависти каждого человека определяется как отношение среднего дохода его знакомых к его доходу. Какое наименьшее значение может принимать средний уровень зависти в Завидном?
(Под *средним* мы везде понимаем среднее арифметическое.) (М.Дидин)

5. У Боба есть n монет с целыми номиналами $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n > 0$. Он стоит перед автоматом, в котором продаётся n батончиков с ценами $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}$. Боб заметил, что для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется условие $b_1+b_2+\ldots+b_i \geq c_1+c_2+\ldots+c_i$. Кроме того, $b_1+b_2+\ldots+b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. Батончики можно покупать в любом порядке. Чтобы купить i-й батончик, Боб должен ввести монеты с суммой номиналов не меньшей b_i. Однако автомат оставляет сдачу себе, и при покупке следующего батончика она не учитывается. Докажите, что Боб может купить не менее $n/2$ батончиков.

6. Найдите все составные числа $n \in \mathbb{N}$, такие что все натуральные делители n кроме самого n могут быть разбиты на пары, в которых разность чисел в каждой паре одинакова для всех пар.

7. Дано простое число p. Двое играют в игру: сначала первый называет число $a_1 \in \mathbb{N}$, потом второй называет число $a_2 \in \mathbb{N}$, потом они считают число натуральных делителей числа $a_2^{a_1} - a_1^{a_2}$ (считаем, что у нуля ровно 1 делитель). Если посчитанное количество делится на p – выигрывает второй. Кто выигрывает?

8. Для многочлена с вещественными коэффициентами $P(x)$ определим $P_n(x) = \underbrace{P(P(\ldots P(x)\ldots))}_{n \text{ раз}}$.
Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P_n = n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $P_2 = Q_2$. (Л. Шатунов)

9. В треугольнике ABC на лучах AB, AC за точки B, C соответственно отмечены точки A_B, A_C, такие что $BA_B = CA_C = BC$. Обозначим ℓ_A прямую A_BA_C. Аналогично определим ℓ_B, ℓ_C. Докажите, что центр описанной окружности треугольника образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C лежит на прямой OI, где O — центр (ABC), а I — центр вписанной окружности ABC. (В. Конышев)

10. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На отрезке AL отмечена точка P. Из точки L опущены перпендикуляры LB_1, LC_1 на отрезки BP и CP соответственно. Оказалось, что $\angle B_1AC_1 + 90^\circ = \angle BPC$. Докажите, что (AB_1C_1) касается (ABC).

(В. Конышев)

XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Бои 5-6. Гранд. 26.09.2025.

1. В Северной Балбесии 2025 жителей, один из них — Президент. Все получают зарплату в 1$. Президент может предлагать законопроекты, меняющие зарплату, но суммарная зарплата должна оставаться равной 2025$, а зарплата каждого жителя должна быть целым неотрицательным числом. За законопроект голосуют все жители кроме Президента, каждый голосует "за", если его зарплата увеличивается, "против" если уменьшается, иначе не приходит на выборы. Законопроект принимается, если "за" проголосовало строго больше жителей, чем "против". Какую наибольшую зарплату сможет назначить себе Президент серией законопроектов?

2. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Максим заполняет клетки таблицы 100×100 числами из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ так, чтобы сумма всех чисел в таблице была чётной. После этого Илья разрезает таблицу на два куска (каждый кусок — связное множество клеток относительно соседства по стороне) так, чтобы суммы чисел в этих кусках были равны. Найдите все натуральные k, для которых Илья сможет это сделать независимо от того, как именно Максим заполнил таблицу.

   (М. Дидин)

3. Заяц и Волк играют в игру. Волк рисует граф, содержащей более одной вершины, и красит его рёбра в красный и синий цвет. После этого Заяц ставит в какие-то две вершины красную и синюю фишку и выбирает, какая из них достанется ему, а какая — Волку. После этого Заяц и Волк ходят по очереди, за ход игрок может передвинуть свою фишку по ребру цвета этой фишки или пропустить ход. Волк выигрывает, если после нескольких ходов фишки оказались в одной вершине. Есть ли у него выигрышная стратегия? (М.Дидин)

4. В хуторе Завидном живёт 5 человек, у каждого есть положительный доход. Некоторые пары жителей знакомы, у каждого есть хотя бы один знакомый. Уровень зависти каждого человека определяется как отношение среднего дохода его знакомых к его доходу. Какое наименьшее значение может принимать средний уровень зависти в Завидном?
   (Под *средним* мы везде понимаем среднее арифметическое.) (М.Дидин)

5. У Боба есть n монет с целыми номиналами $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n > 0$. Он стоит перед автоматом, в котором продаётся n батончиков с ценами $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{N}$. Боб заметил, что для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется условие $b_1+b_2+\ldots+b_i \geq c_1+c_2+\ldots+c_i$. Кроме того, $b_1+b_2+\ldots+b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. Батончики можно покупать в любом порядке. Чтобы купить i-й батончик, Боб должен ввести монеты с суммой номиналов не меньшей b_i. Однако автомат оставляет сдачу себе, и при покупке следующего батончика она не учитывается. Докажите, что Боб может купить не менее $n/2$ батончиков.

6. Все десятизначные числа выписаны в ряд по порядку, начиная с 1000000000 и дальше без пробелов. Верно ли, что по любому куску получившейся последовательности, состоящему из 19 последовательных цифр, можно точно определить, из какого места в последовательности он вырезан?

7. Дано простое число p. Двое играют в игру: сначала первый называет число $a_1 \in \mathbb{N}$, потом второй называет число $a_2 \in \mathbb{N}$, потом они считают число натуральных делителей числа $a_2^{a_1} - a_1^{a_2}$ (считаем, что у нуля ровно 1 делитель). Если посчитанное количество делится на p – выигрывает второй. Кто выигрывает?

8. Пусть $f_{a,b}(x) = [ax + b]$. При каких парах вещественных $a > 0$ и b найдутся такие вещественные $c > 0$ и d, что для всех натуральных n будет выполнено равенство $f_{c,d}(f_{a,b}(n)) = n$.

   (И. Дорофеев)

9. В треугольнике ABC угол при вершине C равен $60°$. Биссектрисы AI, BI пересекают BC, AC в точках D, G. Пусть K, J и M, L — пересечения (AIG), (BID) с DG и биссектрисой угла AIB соответственно. Доказать касание (KDM), (GJL).

   (Дмитрий Крохалев, Георгий Кузнецов, Александр Коваленко)

10. В треугольнике ABC точка D диаметрально противоположна B на (ABC). Пусть I_1, I_2 — инцентры треугольников ABD, CBD. Пусть точка X такова, что I_1BI_2X — параллелограмм. Докажите, что X, середина большей дуги AC окружности (ABC) и D лежат на прямой. (Дмитрий Крохалев, Георгий Кузнецов, Александр Коваленко)