Двадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 20–28.09.2025
Премьер-лига. 4 тур. 26.09.2025

1. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC, а точки E и F расположены на прямой AB и отрезке AC соответственно так, что E, F и M лежат на одной прямой. Описанные окружности треугольников ABC и AEF пересекаются в точке $P \neq A$. Описанная окружность треугольника APM пересекает отрезок CM в точке $D \neq M$. Докажите, что прямые AD, EF и касательная к описанной окружности треугольника AEF в точке P пересекаются в одной точке.

2. У Боба есть n монет с целыми достоинствами $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_n > 0$. Он стоит перед автоматом, в котором продается n шоколадных батончиков с целочисленными ценами b_1, b_2, $\ldots$, b_n. Боб заметил, что для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$, выполняется условие

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_i \geqslant c_1 + c_2 + \ldots + c_i.$$

Кроме того, общая стоимость монет Боба равна сумме стоимостей всех шоколадных батончиков. Шоколадные батончики можно покупать в любом порядке. Чтобы купить i-й шоколадный батончик, Боб должен ввести монеты общей стоимостью не менее b_i. Однако автомат оставляет сдачу себе, и при покупке следующего батончика она не учитывается.

Докажите, что Боб может купить не менее половины шоколадных батончиков.

3. Пусть f — унитарный многочлен степени m с целыми коэффициентами. Известно, что у f есть нецелый корень. Пусть $a_1, a_2, \cdots, a_m$ — целые числа. Докажите, что уравнение

$$f(x) = (y + a_1)(y + a_2)\ldots(y + a_m)$$

имеет конечное число целых решений (x, y).

4. Найдите все составные натуральные числа n такие, что все делители n (кроме самого n) могут быть разбиты на пары, в которых разность чисел в каждой паре одинакова для всех пар.

5. Пусть a, b, c, x, y — положительные числа такие, что $abc = x + y = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a^{2025}}{bx + cy} + \frac{b^{2025}}{cx + ay} + \frac{c^{2025}}{ax + by}.$$

6. На кольцевой дороге длиной n км имеется n автобусных остановок. Расстояние между соседними остановками равно 1 км. На каждой остановке имеется табло, на котором горит одна из цифр 1 и 2. Автобус стартует на некоторой остановке и едет против часовой стрелки со скоростью 60 км/час по следующим правилам: если на остановке, на которой остановился автобус, на табло была цифра 1, в следующий раз он останавливается через 1 км, а если цифра 2, то через 2 км. После того, как автобус отъезжает от остановки, на которой он остановился, цифра на табло переключается: с 1 на 2, а с 2 на 1. Докажите, что, начиная с какого-то момента, через $3n$ минут после любой остановки автобус тоже будет останавливаться. (Автобус не тратит время на торможение, разгон и остановку.)

7. AD, BE, CF — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC. Точка M — середина отрезка BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые XY, BC и EF **не** пересекаются в одной точке.

8. Все десятизначные числа выписаны в ряд в порядке возрастания, начиная с 1000000000 и дальше без пробелов. Верно ли, что по любому куску получившейся последовательности, состоящему из 19 последовательных цифр, можно точно определить, из какого места в последовательности он вырезан?