XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига. Полуфинал. 26.09.2025

1. В треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, высота, проведённая к стороне AB, имеет длину h. Известно, что $c < h\sqrt{2}$. Докажите, что $a^2 + b^2 > c^2 + h^2$.

2. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что существуют натуральное число n и простые (необязательно различные) числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$, удовлетворяющие равенству: $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_k^2 = n!$.

3. Найдите все натуральные числа n, такие что все делители n (кроме самого n) могут быть разбиты на пары и в каждой паре разность чисел одна и та же.

4. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K такая, что $AK : KB = 1 : 2$. Найдите $\angle ABC$, если $\angle BAC = 45^\circ$ и $\angle ACK = 15^\circ$.

5. Все десятизначные числа выписаны в ряд по порядку, начиная с числа 1000000000 без пробелов. Верно ли, что по любому куску получившейся последовательности, состоящему из 19 последовательных цифр, можно точно определить, из какого места в последовательности он вырезан?

6. В клетках доски 10×10 расставлены числа от 1 до 100 (каждое по одному разу). К каждому из этих чисел прибавили произведение номера столбца, в котором оно стоит, на номер строки, в котором оно стоит. Обязательно ли найдутся два числа разность между которыми делится на 100?

7. Настя красит все клеточки квадрата 2025×2025 в чёрный и белый цвета. Раскраска ей нравится, если у каждой клеточки чётное число соседних клеток чёрного цвета. Сколько различных могут понравиться Насте?

8. В государстве 11 городов. Министерство транспорта организовало конкурс между двумя авиакомпаниями. По условиям конкурса авиакомпании по очереди открывают рейсы, соединяющие пары городов, не связанные до этого. Главный приз получает авиакомпания, добившаяся того, что из каждого города будет выполняться хотя бы один рейс любой авиакомпании (можно будет куда-нибудь улететь). Кто получит приз: первая авиакомпания или вторая?

XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

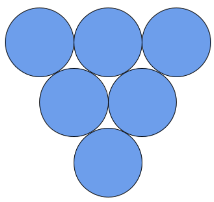
Старт-лига. Бои за 5–6 и 7–8 места. 26.09.2025

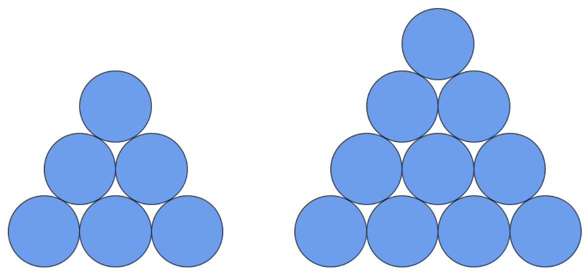
1. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что существуют натуральное число n и простые (необязательно различные) числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$, удовлетворяющие равенству:

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_k^2 = n!$$

2. В стране, где 200 городов, провели несколько дорог с односторонним движением так, что из каждого города выходит хотя бы одна дорога и в каждый город входит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно провести не более, чем 100 новых дорог с односторонним движением так, чтобы из любого города можно было проехать в любой другой, не нарушая правил. Разрешается соединять два города несколькими дорогами.

3. На столе лежат несколько монет, образуя пирамидку. На рисунке справа изображены две возможные пирамидки с основаниями из трёх и из четырёх монет. За ход разрешается переложить одну из монет на свободное на столе место. Требуется за наименьшее количество ходов «перевернуть» пирамидку, т. е. получить пирамидку с вершиной ниже основания. Например, перевернуть пирамидку из 6 монет можно за два хода, переложив две нижние угловые монеты, получить пирамидку, изображённую на рисунке слева. За какое наименьшее количество ходов можно перевернуть пирамидку, в основании которой 100 монет?





4. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагональ BD является биссектрисой углов CBE и ADC, а диагональ CE является биссектрисой углов ACD и BED. Диагональ BE пересекается с диагоналями AC и AD в точках K и L соответственно. Докажите, что $CK = DL$.

5. Натуральное число $N = 11\ldots11$, в десятичной записи которого использованы только единицы, делится на 7. Докажите, что N делится на 13.

6. Все шестизначные числа выписаны в ряд по порядку, начиная с числа 100000 без пробелов. Верно ли, что по любому куску получившейся последовательности, состоящему из 11 последовательных цифр, можно точно определить, из какого места в последовательности он вырезан?

7. Настя красит все клеточки квадрата 10×10 в чёрный и белый цвета. Раскраска ей нравится, если у каждой клеточки чётное число соседних клеток чёрного цвета. Сколько различных раскрасок могут понравиться Насте?

8. В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $AD = DC$ и угол BAD — прямой. Найдите углы четырёхугольника, если вершина C лежит на прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABD.