XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Полуфинал. Юниор-лига. 26.09.2025.

1. В клетках доски 10×10 расставлены числа от 1 до 100 (каждое по одному разу). К каждому из этих чисел прибавили произведение номера столбца, в котором оно стоит, на номер строки, в котором оно стоит. Обязательно ли найдутся два числа разность между которыми делится на 100?

2. AD, BE, CF — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC. Точка M — середина отрезка BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые XY, BC и EF никогда **не** пересекаются в одной точке.

3. Найдите все натуральные составные числа n, такие что все делители n (кроме самого n) могут быть разбиты на пары, в которых разность чисел в каждой паре одинакова для всех пар.

4. Все десятизначные числа выписаны в ряд по порядку, начиная с 1000000000 и дальше без пробелов. Верно ли, что по любому куску получившейся последовательности, состоящему из 19 последовательных цифр, можно точно определить, из какого места в последовательности он вырезан?

5. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Прямые BI и CI пересекают окружность ω, описанную около треугольника ABC в точках B' и C' соответственно. Точка M — середина отрезка $B'C'$, M' — точка пересечения прямой MI с окружностью ω, лежащая на меньшей дуге BC. Докажите, что центр окружности ω лежит на окружности, описанной около треугольника AMM'.

6. Положительное число x удовлетворяет условию $x^3 + px + q^2 = 0$. Докажите, что $x \leqslant \left(\frac{p}{2q}\right)^2$.

7. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Максим заполняет клетки таблицы 100×100 числами из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ так, чтобы сумма всех чисел в таблице была чётной. После этого Илья разрезает таблицу на два куска (каждый кусок — связное множество клеток относительно соседства по стороне) так, чтобы суммы чисел в этих кусках были равны. Найдите все натуральные k, для которых Илья сможет это сделать независимо от того, как именно Максим заполнил таблицу.

8. Пусть $n > 1$ натуральное число, а a и b различные натуральные числа не превосходящие n. Верно ли, что среди любых n подряд идущих чисел найдутся два различных числа произведение которых делится на ab.

XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Бои за 5–10 места. Юниор-лига. 26.09.2025.

1. В клетках доски 10×10 расставлены числа от 1 до 100 (каждое по одному разу). К каждому из этих чисел прибавили произведение номера столбца, в котором оно стоит, на номер строки, в котором оно стоит. Обязательно ли найдутся два числа разность между которыми делится на 100?

2. AD, BE, CF — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC. Точка M — середина отрезка BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые XY, BC и EF никогда **не** пересекаются в одной точке.

3. Все десятизначные числа выписаны в ряд по порядку, начиная с 1000000000 и дальше без пробелов. Верно ли, что по любому куску получившейся последовательности, состоящему из 19 последовательных цифр, можно точно определить, из какого места в последовательности он вырезан?

4. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K такая, что $AK : KB = 1 : 2$. Найдите $\angle ABC$, если $\angle BAC = 45°$ и $\angle ACK = 15°$.

5. Положительное число x удовлетворяет условию $x^3 + px + q^2 = 0$. Докажите, что $x \leqslant \left(\frac{p}{2q}\right)^2$.

6. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что существуют натуральное число n и простые (необязательно различные) числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$, удовлетворяющие равенству: $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_k^2 = n!$.

7. На доске написано несколько чисел. Причём, для любого составного числа $a < 1000000$, на доске написано не более одного числа, которое делится на a. Также для любых шести различных простых чисел, меньше 1000 верно, что найдутся два числа с доски, произведение которых делится на произведение этих шести простых. Докажите, что тогда найдутся два числа с доски, произведение которых делится на произведение всех простых, меньших 1000.

8. Пусть $n > 1$ натуральное число, а a и b различные натуральные числа не превосходящие n. Верно ли, что среди любых n подряд идущих чисел найдутся два различных числа произведение которых делится на ab.