XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Финал. Гранд. 27.09.2025.

1. Дан треугольник ABC с высотой AH. Точки E, F — проекции точки H на AB и AC. Докажите, что существует окружность, которая касается описанной окружности и двух вневписанных треугольника ABC и проходит через E и F. (К. Бельский)

2. Пусть X, Y — точки касания касательных, проведённых из точки пересечения медиан к вписанной окружности треугольника. Докажите, что X и Y изотомически сопряжены в этом треугольнике. (Д. Игнатьев, С. Чуев)

3. Белла и Чингиз играют на полном графе из 2024 вершин, делая ходы по очереди; начинает Белла. В свой ход Чингиз красит k рёбер (или все оставшиеся) в чёрный цвет, Белла — одно в белый. Игра кончается, когда все рёбра будут покрашены. Если максимальная чёрная клика окажется строго больше максимальной белой, то выиграет Чингиз, иначе – Белла. При каких $k \geqslant 3$ Чингиз имеет выигрышную стратегию?

4. Дана бесконечная клетчатая плоскость. В каждой клетке лежат 2 карточки со стрелками (вверх, вниз, вправо или влево). В клетке не может быть двух карточек с одинаковыми стрелками. В одну из клеток ставят фишку. Как только фишка попадает в некоторую клетку, Петя забирает лежащие в ней карточки. За ход Петя может передвинуть фишку в соседнюю по стороне клетку, потратив карточку с соответствующей стрелкой. Запрещено двигать фишку на клетку, на которой она уже была. Петя хочет собрать 2025 карточек. Всегда ли это возможно? (Максим Дидин)

5. Дано натуральное n. Аня рисует связный граф на n вершинах, в которых она расставляет неотрицательные вещественные числа с суммой 1. Одну из вершин Аня называет стартовой вершиной A. Увидев этот граф и числа, Боря выбирает в нём простой путь (возможно, длины 0), выходящий из A. Выигрыш Бори — среднее арифметическое чисел, записанных в вершинах этого пути (включая A и конечную вершину). Какой наибольший выигрыш может гарантировать Боря вне зависимости от действий Ани?

6. Дано натуральное число n. Пусть $A_1, A_2, \cdots, A_k$ — k попарно различных подмножеств множества $\{1, 2, \cdots, 2n\}$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

   - мощность каждого подмножества равна n либо $n+1$;
   - мощность пересечения любых двух различных подмножеств не меньше 2.

   Найдите максимально возможное значение k.

7. Найдите наибольшую длину интервала (a, b), где $b > a+1$, для которого существует непрерывная функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению (для любого $x \in (a, b-1)$):
$$(1 - f(x)) \cdot f(1+x) = 1 + f(x).$$
   (Л. Емельянов)

8. К десятичной записи натурального числа разрешается справа приписывать 0 или 4, а также делить число на 2, если оно чётное. Верно ли, что для любого натурального n из числа 4 за несколько операций можно получить число n?

9. Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ площади S и точка O внутри него. Пусть h_i — расстояние от O до прямой A_iA_{i+1} (индексы берутся по модулю n). Пусть $B_1B_2 \ldots B_n$ — другой выпуклый многоугольник площади S такой, что векторы $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ и $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ сонаправлены для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите неравенство
$$B_1B_2 \cdot h_1 + B_2B_3 \cdot h_2 + \ldots + B_nB_1 \cdot h_n \geqslant 2S.$$
   (М. Дидин)

10. Среди чисел, не превосходящих натурального n, выбраны пять попарно различных натуральных с произведением P. Докажите, что из любых $2n$ последовательных натуральных чисел можно выбрать пять попарно различных, произведение которых кратно P. (М. Дидин)