

Старт-лига. ФИНАЛ. 27.09.2025

1. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить полоску шириной 15 см и длиной 2 м так, чтобы не нашлось двух одноцветных точек на расстоянии 1 м друг от друга?
2. Выпуклый 2025-угольник разбит на треугольники так, что каждая сторона треугольника разбиения является либо стороной другого треугольника разбиения, либо стороной 2025-угольника и никакие две стороны 2025-угольника не являются сторонами одного треугольника разбиения. При своём ходе каждый из двух игроков закрашивает любой треугольник разбиения, не окрашенный ранее, в свой цвет: первый — в красный, второй — в синий. В конце игры первый игрок получает очко за каждую общую сторону двух красных треугольников, а второй — за каждую общую сторону двух синих. Выигрывает тот, кто набрал больше очков. Кто выиграет, первый или второй?
3. Тройка простых чисел (p, q, r) такова, что число $p^q + p^r$ — точный квадрат. Найдите все такие тройки простых чисел.
4. В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = BC = CD$, $\angle B = \angle A = 80^\circ$. Какие значения может принимать $\angle C$?
5. Дан выпуклый восьмиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ такой, что все восемь углов $A_1A_4A_5$, $A_2A_5A_6$, $A_3A_6A_7$, $A_4A_7A_8$, $A_5A_8A_1$, $A_6A_1A_2$, $A_7A_2A_3$, $A_8A_3A_4$ — прямые. Докажите, что данный восьмиугольник можно вписать в окружность.
6. *Плюсом* назовём фигуру из **четырёх** клеток, которая строится так: выбирается клетка A (эта клетка не входит в фигуру), в строке и в столбце, содержащих клетку A сверху, снизу, слева, справа от неё выбираются по одной клетке. Сможет ли Рашид покрасить все клетки таблицы 5×6 в два цвета так, чтобы не было одноцветных плюсов?
7. Урфин Джюс формирует армию из нескольких отрядов своих деревянных солдат. Численность отрядов не обязательно одинаковая. Оказалось, что численность армии, сформированной из N любых отрядов превосходит численность армии, сформированной из любых $N - 1$ отрядов. При каких K можно гарантированно утверждать, что численность армии, сформированной из $K + 1$ отряда превосходит численность армии, сформированной из K отрядов?
8. Четыре положительных целых числа x, y, z и t удовлетворяют соотношениям $xy - zt = x + y = z + t$. Может ли оказаться, что xy и zt — точные квадраты?