XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Финал. Юниор-лига. 27.09.2025.

1. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить полоску шириной 15 см и длиной 2 м, чтобы не нашлось двух одноцветных точек на расстоянии 1 м друг от друга?

2. Поле для игры представляет собой выпуклый 2025-угольник, который разбит на треугольники так, что каждая сторона треугольника разбиения является либо стороной другого треугольника разбиения, либо стороной 2025-угольника, и никакие две стороны 2025-угольника не могут быть сторонами одного треугольника разбиения. Каждый из двух игроков в свой ход закрашивает любой из ещё не окрашенных треугольников разбиения в свой цвет: первый — в красный, второй — в синий. После того, как весь 2025-угольник раскрашен, первый игрок получает очко за каждую общую сторону двух красных треугольников, а второй — за каждую общую сторону двух синих. Выигрывает тот, кто набрал больше очков. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия? Если да, то у кого?

3. В трапеции $ABCD$ $AB \,||\, CD$. Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E. Докажите, что $AF \cdot AD = CE \cdot BC$.

4. Найдите все натуральные числа n такие, что существует палиндром из n цифр, являющийся точной $n-$ной степенью натурального числа.

5. К десятичной записи натурального числа разрешается справа приписывать 0 или 4, а также делить число на 2, если оно чётное. В начале дано число 4. Любое ли число можно получить с помощью таких операций?

6. Существуют ли такие пары простых чисел p и q, что числа $2024p - 2005q$ и $2005q - 2023p$ — тоже простые?

7. Какое наибольшее количество целых чисел может быть в последовательности $\{a_i\}$, для которой $a_1 > 0$ и для любого $n > 1$ верно, что $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$?

8. Окружность с центром O касается дуги полукруга с диаметром AB в точке T и целиком лежит в этом полукруге. Из точки B к этой окружности проведены касательные BP и BQ (P и Q — точки касания). Докажите, что прямые AO, BT и PQ пересекаются в одной точке.