Восьмой Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 16–24.09.2013

Гранд-лига, 1 тур. 18.09.2013

1. Дана бесконечная десятичная дробь, причем после запятой у нее встречаются только цифры 0, 1, 2. Известно, что если все цифры 0 заменить на 1, то получится периодическая десятичная дробь (возможно с предпериодом), и если все цифры 1 заменить на 2, то тоже получится периодическая десятичная дробь. Следует ли отсюда, что исходная дробь периодическая?

2. Найдите наименьшее действительное x такое, что неравенство $x + c \leqslant (x + a)(x + b)$ выполнено для всех треугольников со сторонами a, b, c.

3. В клетках таблицы 7×7 записаны натуральные числа от 1 до 49 по порядку (то есть в клетке на пересечении i-й строки и j-го столбца записано число $7(i - 1) + j$). За одну операцию можно увеличить число в одной из клеток на 1 и одновременно уменьшить на 1 числа в некоторых двух клетках, соседних с ней по стороне, либо наоборот, уменьшить число в одной из клеток на 1 и одновременно увеличить на 1 числа в некоторых двух клетках, соседних с ней по стороне. Можно ли за несколько таких операций сделать числа во всех клетках равными 2013?

4. Касательные, проведенные из точки P к окружности касаются ее в точках A и B. Точка C лежит на меньшей дуге AB, а D диаметрально противоположна точке C. Перпендикуляр к прямой PC, восставленный в точке C, пересекает прямые DA и DB в точках K и L. Докажите, что $CK = CL$.

5. При каких натуральных $n \geqslant 2$ в любой последовательности $(a_1, a_2, ..., a_n)$ натуральных чисел с суммой $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n - 1$ можно найти несколько (более одного) чисел, стоящих подряд, среднее арифметическое которых натурально?

6. Плоскость покрашена в 6 цветов так, что в каждый цвет покрашена хотя бы одна точка. Можно ли утверждать, что всегда найдутся 4 разноцветные точки, лежащие на одной окружности или на одной прямой?

7. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $f(x + y) + y \leqslant f(f(f(x)))$.

8. Рассматриваются наборы из семи гирек неотрицательных весов с суммарным весом 1. У какого минимального числа подмножеств этого набора суммарный вес может оказаться больше или равен 2/3?

9. Какие натуральные числа могут быть представлены в виде $\dfrac{(a + b + c)^2}{abc}$, где a, b, c — натуральные числа?

10. Пусть I_a и I_b — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC и CA соответственно. Прямая, параллельная AB и пересекающая стороны AC и BC, пересекает окружность, описанную около треугольника ABC в точках P и Q. Пусть $R = CP \cap AB$. Докажите, что $\angle I_aQI_b + \angle I_aRI_b = 180°$.