Восьмой Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 16–24.09.2013

Гранд-лига, 2 тур. 19.09.2013

1. Найдите количество упорядоченных наборов чисел (a, b, c, x, y, z), удовлетворяющих соотношению $ab + xy \equiv bc + yz \equiv ca + zx \equiv 1 \pmod{2013}$ и таких, что a, b, c, x, y, $z \in \{0, 1, 2, \ldots, 2012\}$.

2. Школьники играли в настольный теннис "на победителя". Они установили очередь и правила: вначале играют первый и второй, а в дальнейшем каждый очередной участник играет с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова сыграли по тем же правилам, но очередь шла в обратном порядке (вчерашний последний стал первым, предпоследний — вторым, и так далее). Известно, что каждый сыграл хотя бы раз и в первый день, и во второй. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.

3. Точка P лежит внутри остроугольного треугольника ABC. Пусть точки A', B', C' симметричны точке P относительно сторон BC, CA, AB. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $A'B'C'$ лежит внутри треугольника ABC.

4. На плоскости отмечены $n > 100$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и несколько треугольников с вершинами в отмеченных точках. Оказалось, что для любых шести отмеченных точек все отмеченные треугольники с вершинами только в этих шести точках имеют общую вершину. Докажите, что все отмеченные треугольники имеют общую вершину.

5. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности. Прямая AI вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке L. Окружность (CIL) вторично пересекает прямую BI в точке K. Докажите, что $BK = CK$.

6. Вершины равностороннего треугольника лежат на гиперболе $y = 1/x$. Пусть a равно сумме абсцисс, а b — сумме ординат трех вершин треугольника. Чему может равняться произведение ab?

7. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что для любого натурального n выполнено равенство $P(n!) = |P(n)|!$.

8. На основании AB равнобедренной трапеции $ABCD$ выбрана точка P такая, что $AP - BP = BD - BC$. Перпендикуляр, восставленный к AB в точке P пересекает прямые CD, AC и BD в точках Q, R и S соответственно. Окружность ω касается прямых AC и BD в точках R и S. Докажите, что окружность с диаметром PQ касается окружности ω.

9. На клетчатой доске $n \times n$ располагают параллелограммы, у каждого из которых две противоположные стороны являются диагоналями соседних по стороне клеток. Какое наибольшее количество таких неперекрывающихся (не имеющих общих внутренних точек) параллелограммов может быть?

10. Найдите все тройки целых неотрицательных x, y, z такие что $7^x + 2^y = 3^z$.