Восьмой Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 16–24.09.2013

Гранд-лига, 3 тур. 21.09.2013

1. Даны положительные $x_1,\ldots,x_n$ ($n \geqslant 3$) такие, что $x_1x_2\ldots x_n = 1$. Докажите неравенство $\dfrac{x_1^8}{(x_1^4+x_2^4)x_2}+\dfrac{x_2^8}{(x_2^4+x_3^4)x_3}+\ldots+\dfrac{x_n^8}{(x_n^4+x_1^4)x_1} \geqslant \dfrac{n}{2}$.

2. На плоскости отмечены $m+n$ точек ($m,n \geqslant 3$), никакие три из которых не лежат на одной прямой. Известно, что существуют выпуклый n-угольник с вершинами в отмеченных точках, строго внутри которого лежит выпуклый m-угольник с вершинами в отмеченных точках. Докажите, что если натуральное k таково, что $k^2-k+1 \leqslant m+n$, то существует выпуклый $(k+1)$-угольник с вершинами в отмеченных точках такой, что внутри него не лежит никакая другая отмеченная точка.

3. Даны два различных натуральных числа a и b, больших 1 и не делящихся на квадраты простых чисел. Докажите, что существует число $c>0$ (зависящее от a, b) такое, что для любого натурального n выполнено $\left|\{n\sqrt{a}\}-\{n\sqrt{b}\}\right| > \dfrac{c}{n^3}$.

4. В классе некоторые мальчики дружат с некоторыми девочками (дружба взаимна). На уроке все ученики сидят за партами — по одному или по двое за партой. Назовем подмножество девочек A назовем ***хорошим***, если класс можно пересадить так, чтобы каждая девочка из A сидела за партой со своим другом-мальчиком. Аналогично, назовем подмножество B мальчиков ***хорошим***, если можно пересадить класс так, чтобы каждый мальчик из B сидел за партой со своей подругой-девочкой. Известно, что множество всех мальчиков класса не является хорошим. Докажите, что можно одного из мальчиков перевести в другой класс так, чтобы каждое хорошее подмножество девочек осталось хорошим.

5. Найдите все функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такие, что для каждого натурального n выполнено равенство $\sum\limits_{i=1}^{n}(f(i))^3 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(i)\right)^2$.

6. В плоскости треугольника ABC выбрана точка K. Точки A_1, B_1, C_1 — проекции точки K на прямые, содержащие высоты треугольника ABC, проведчнные из вершин A,B,C соответственно. Точку K будем называть ***хорошей***, если $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Докажите, что если 3 точки на плоскости хорошие, то и ортоцентр образованного ими треугольника — тоже хорошая точка.

7. При каком наименьшем n число $2013n$ является разностью двух кубов натуральных чисел?

8. Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что b^3+c^3 делится на a^2, c^3+a^3 делится на b^2 и a^3+b^3 делится на c^2.

9. Даны n фигур в квадрате 1×1, каждая имеет площадь $1/2$, а пересечение любых двух из них имеет площадь $1/4$. Докажите, что в квадрате площадь, не покрытая фигурами, составляет не более $1/(n+1)$.

10. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, симметричный относительно диагонали BD. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AD в точках K и L соответственно, а прямая m пересекает луч CB и отрезок CD в точках M и N соответственно. Известно, что прямые ℓ и m симметричны относительно прямой AC. Докажите, что $KM \parallel LN$.