Восьмой Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 16–24.09.2013

Гранд-лига, 4 тур (полуфинал). 22.09.2013

1. Найдите все пары натуральных m, n со следующим свойством: для любого многочлена $P(x)$ степени m (с действительными коэффициентами) найдется многочлен $Q(x)$ степени n (с действительными коэффициентами) такой, что $Q(P(x))$ делится на $Q(x)$.

2. Для каких натуральных n на плоскости существует множество выпуклых многоугольников $M_1, \ldots, M_n$ такое, что для любого непустого подмножества $S \subset \{1, \ldots, n\}$ найдется точка плоскости P, лежащая строго внутри M_i для $i \in S$, и лежащая строго вне M_i для $i \notin S$.

3. Дан куб $10 \times 10 \times 10$, разбитый на единичные кубики, и натуральное n. Аня задумывает множество S единичных кубиков такое, что S является объединением попарно непересекающихя кирпичей $1 \times 1 \times 10$ (или $1 \times 10 \times 1$, или $10 \times 1 \times 1$). Боря может назвать множество множество M из n клеток и получить от Ани информацию про каждую клетку из M, принадлежит ли она множеству S. При каком наименьшем n Боря всегда сможет определить множество S?

4. Последовательность вида $a_1, a_2, \ldots$, называется *регулярной*, если найдется действительное число x такое, что $a_m = [mx]$ для всех натуральных m. Номер n ($n \geqslant 2$) называется *вынужденным* для регулярной последовательности $a_1, a_2, \ldots$, если для любой регулярной последовательности $b_1, b_2, \ldots$ такой что $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, выполнено $a_n = b_n$. Какое наибольшее возможное количество вынужденных номеров, не превосходящих 1000, может быть у регулярной последовательности?

5. Дан связный граф на n вершинах. Степень каждой вершины не меньше k. Докажите, что ребра этого графа можно покрасить в $n - k$ цветов таким образом, что между любыми двумя вершинами существует такой путь, что цвета ребер в нем не повторяются.

6. Докажите, что для любого n найдутся натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ такие, что $\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \ldots > \varphi(a_n)$, где $\varphi(m)$ обозначает количество натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с m.

7. Дана окружность и точка P внутри нее. Через P проводятся всевозможные пары хорд XY и ZT. Докажите, что линии центров окружностей (PXZ) и (PYT) проходят через фиксированную точку.

8. Найдите все натуральные n, для которых $n! - 1$ делится на $2n + 7$.

9. Окружность вписана в угол A остроугольного треугольника ABC с центром описанной окружности O и касается сторон AB и AC в точках P и Q. Также она касается внешним образом описанной окружности треугольника BOC. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

10. В пространстве расположены 2 правильных треугольника со стороной 1. Известно, что расстояние между любыми двумя их вершинами не превосходит 1. Докажите, что эти треугольники имеют общую вершину.