Восьмой Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 16–24.09.2013

Гранд-лига. Бои за 5 — 8 места. 22.09.2013

1. Цифры натурального числа, не кратного 10, записали в обратном порядке и получившееся число прибавили к исходному. Докажите, что результат кратен 81 тогда и только тогда, когда сумма цифр исходного числа делится на 81.

2. На плоскости несколько правильных десятиугольников с соответственно параллельными сторонами раскрашены в 11 цветов. Известно, что любые два десятиугольника разных цветов имеют общую точку. Докажите, что для какого-то цвета любые два десятиугольника этого цвета имеют общую точку.

3. На шахматной доске 50×50 в начале игры находился белый король в углу и 100 черных ладей. Ходили по очереди, начинали белые. Король, ни разу не попав под шах и не побив ни одной ладьи, перешел в противоположный угол. Докажите, что король сделал более 200 ходов.

4. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность S. Отрезки AD и BE пересекаются в точке T. Прямая, параллельная CD и проходящая через T, пересекает отрезки AB и CE в точках X и Y. Докажите, что описанная окружность треугольника AXY касается S.

5. Найдите все такие числа M, что для любых положительных чисел a, b, c хотя бы одно из чисел $a + \frac{M}{ab}$, $b + \frac{M}{bc}$, $c + \frac{M}{ca}$ не меньше, чем $1 + M$.

6. Дана окружность и точка P внутри нее. Через P проводятся всевозможные пары хорд XY и ZT. Докажите, что все прямые, проходящие через центры описанных окружностей треугольников PXZ и PYT, проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора хорд.

7. Натуральные числа a и b таковы, что $b+1$ кратно a, а $a^2 - 2$ кратно b. Докажите, что $\frac{b+1}{2}$ – квадрат натурального числа.

8. Ожерелье состоит из 90 бусин красного, синего и зелёного цвета. Известно, что среди любых пяти бусин, идущих подряд, есть хотя бы одна красная, а среди любых семи, идущих подряд – хотя бы одна синяя. Какое наибольшее количество зелёных бусин может быть в этом ожерелье?

9. Докажите, что для натурального $m > 1$ выполнено $\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)k}{m^k} = 1.$

10. Можно ли все 2^n столбцов высоты n из 0 и 1 выписать в ряд так, чтобы суммы по модулю 2 соседних пар столбцов этого ряда были попарно различны? (Столбцы складываются покомпонентно.)