Восьмой Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 16–24.09.2013

Гранд-лига. Финал. 23.09.2013

1. Рассмотрим таблицу 100×100. Множество из 100 клеток называется *паросочетанием* если все клетки находятся в разных строках и разных столбцах. Для каких пар натуральных чисел $(G; I)$ можно так покрасить G клеток в голубой цвет, и I клеток в изумрудный цвет, чтобы в каждом паросочетании нашлось бы либо две голубых клетки, либо две изумрудных?

2. Даны попарно взаимно простые натуральные числа $m_1, \ldots, m_n$ и множества $A_1, \ldots, A_n$ ненулевых остатков по модулям $m_1, \ldots, m_n$ соответственно. Докажите, что найдется натуральное число x, не превосходящее $(2|A_1|+1)(2|A_2|+1)\ldots(2|A_n|+1)$ такое, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и любого $a_i \in A_i$ число $x - a_i$ не делится на m_i.

3. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $ab + bc + ca = 1$. Докажите неравенство $a\sqrt{b^2 + bc + c^2} + b\sqrt{c^2 + ca + a^2} + c\sqrt{a^2 + ab + b^2} \geqslant \sqrt{3}$.

4. Докажите, что произведение нечетного количества чисел вида $(2x^2 + 3y^2)$, где x и y — натуральные, не является полным квадратом.

5. Дан многочлен с целыми коэффициентами $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, где $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$. Известно, что a_0 — простое число и $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| < a_0$. Докажите, что $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$ (то есть не раскладывается в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами степеней меньших чем степень $f(x)$).

6. Дан выпуклый многоугольник M, все стороны которого по длине равны 1. Докажите, что существует выпуклый многоугольник N, обладающий следующими свойствами:

   (i) M содержится строго внутри N;

   (ii) все стороны N равны 1 по длине;

   (iii) для любой вершины многоугольника N найдется вершина многоугольника M, удаленная от нее на расстояние 1.

7. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < AC$) проведены биссектриса AD и выстота AH. Серединный перпендикуляр к AD пересекает полуокружности, построенные на сторонах AB и AC как на диаметрах вне треугольника, в точках X и Y соответственно. Докажите, что четырехугольник $XYDH$ — вписанный.

8. Рассматриваются ориентированные графы без ориентированных циклов (в частности без петель) со 100 ребрами; кратные ребра не допускаются. Найдите наибольшее возможное количество путей из некоторой вершины в некоторую другую вершину в таком графе.

9. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, вписанны в окружность ω. Пусть I_1, I_2 и r_1, r_2 — центры и радиусы вписанных окружностей треугольников ACD and ABC соответственно. Пусть ω' — окружность, которая касается отрезков AB, AD и касается ω в точке T. Касательные к окружности ω, проведенные в точках A и T, пересекаются в точке K. Известно, что $r_1 = r_2$. Докажите, что точки I_1, I_2, K лежат на одной прямой.

10. Найдите все бесконечные арифметические прогрессии $a_1, a_2, ...$, состоящие из натуральных чисел и обладающие свойством: существует натуральное $N > 1$ такое, что для всех $k \in \mathbb{N}$ число $a_{N+1}a_{N+2}...a_{N+k}$ делится на $a_1 a_2 ... a_k$.