Восьмой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 17-24.09.2013

Финал. 23 сентября 2013 г.

1. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < AC$) проведены биссектриса AD и высота AH. Серединный перпендикуляр к AD пересекает полуокружности, построенные на сторонах AB и AC как на диаметрах вне треугольника, в точках X и Y соответственно. Докажите, что четырёхугольник $XYDH$ — вписанный.

2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, а точка F — основание высоты, проведённой из вершины C. Точки X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую CO соответственно. Докажите, что $OF^2 > OX \cdot OY$.

3. Каждая точка плоскости окрашена в один из 2013 цветов. Треугольник на плоскости называется *одноцветным*, если все его вершины окрашены в один и тот же цвет. Докажите, что можно выбрать бесконечно много одноцветных треугольников одинаковой площади.

4. Сколькими способами можно расставить нули и единицы в клетки доски 2013×2013 таким образом, чтобы в любом прямоугольнике 2×3 и 3×2 сумма чисел была бы чётна?

5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $ab + bc + ca = 1$. Докажите неравенство $a\sqrt{b^2 + bc + c^2} + b\sqrt{c^2 + ca + a^2} + c\sqrt{a^2 + ab + b^2} \geqslant \sqrt{3}$.

6. Докажите, что рёбра связного графа с n рёбрами можно занумеровать числами от 1 до n так, чтобы для каждой вершины степени больше 1 наибольший общий делитель номеров выходящих из него рёбер был равен 1.

7. У многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + p$ с целыми коэффициентами свободный член p прост и $|a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n| < p$. Докажите, что $f(x)$ не раскладывается на непостоянные множители с целыми коэффициентами.

8. Найдите все бесконечные возрастающие арифметические прогрессии (a_n) с натуральными членами, для которых можно найти такое N, что $a_{N+1}a_{N+2} \cdot \ldots \cdot a_{N+k}$ делится на $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ при всех натуральных k.