Восьмой Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок», 16–24.09.2013

Командная олимпиада. Старшая лига. 17.09.2013

1. Числа x и y различны и не равны 1. Известно, что $\dfrac{yz-x^2}{1-x} = \dfrac{zx-y^2}{1-y} = a$. Докажите, что $a = x+y+z$.

2. В компании некоторые пары людей являются друзьями (дружба взаимна). Известно, что если двое людей не являются друзьями, то они имеют ровно двух общих друзей. В этой компании нашлись двое друзей A и B, у которых нет общих друзей. Докажите, что у A и B поровну друзей.

3. Можно ли записать в строчку числа от 1 до 2013 так, чтобы все 2012 произведений пар соседних чисел давали разные остатки при делении на 2013?

4. Через основания каждой из биссектрис треугольника ABC проведены две прямые, параллельные сторонам треугольника, не содержащим соответствующее основание. На каждой из этих прямых рассмотрим отрезок, лежащий внутри треугольника. Докажите, что сумма этих шести отрезков не превосходит периметра треугольника ABC.

5. На доске написано число 2010. Каждый из двух игроков своим ходом прибавляет к написанному числу один из его простых делителей не больший 10. Выигрывает тот, кто напишет на доске число большее 1000000. Кто может выиграть, независимо от игры соперника?

6. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки K, L, M соответственно. Точки A_1 и A_2 — середины отрезков AL и AM, B_1 и B_2 — середины отрезков BM и BK, C_1 и C_2 — середины отрезков CK и CL. Пусть A', B', C' — центры описанных окружностей треугольников AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2. Докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

7. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ такие, что для любых неотрицательных m и n выполняется равенство $2f(m^2+n^2) = (f(m))^2+(f(n))^2$. (Здесь $\mathbb{Z}_+$ — множество всех целых неотрицательных чисел.

8. Внутри треугольника T выбрано 1000 точек. Докажите, что существует набор M из 2013 треугольников со сторонами, параллельными сторонам T, обладающий следующими свойствами:

   i) ни одна из выбранных точек не лежит строго внутрь треугольника из набора M;

   ii) объединение всех треугольников из набора M есть треугольник T.