Восьмой Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 17-24.09.2013

Первый тур. Премьер-лига. 18 сентября 2013 г.

1. В бесконечной десятичной дроби после запятой встречаются только цифры 0, 1, 2. Известно, что если все цифры 0 заменить на 1, то получится периодическая десятичная дробь (возможно, с предпериодом), и если все цифры 1 заменить на 2, то тоже получится периодическая десятичная дробь. Следует ли отсюда, что исходная дробь периодическая?

2. При каких натуральных $n \geqslant 2$ в любой последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ натуральных чисел с суммой $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2n - 1$ можно найти несколько (более одного) чисел, стоящих подряд, среднее арифметическое которых натурально?

3. Касательные, проведенные из точки P к окружности с центром O, касаются окружности в точках A и B. Точка C лежит на меньшей дуге AB. Перпендикуляр к прямой PC, восставленный в точке C, пересекает биссектрисы углов AOC и BOC в точках D и E. Докажите, что $CD = CE$.

4. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки P, Q, R, S соответственно. Отрезки PR и QS пересекаются в точке T. Оказалось, что четырёхугольники $APTS$, $BQTP$, $CRTQ$ и $DSTR$ — описанные. Докажите, что и четырёхугольник $ABCD$ — описанный.

5. Можно ли разбить квадрат 2013×2013 на прямоугольники 1×3 так, чтобы количества горизонтальных и вертикальных прямоугольников отличались на 1?

6. Докажите, что если числа a и b положительны и меньше 1, то $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + 1 > 3ab$.

7. Найдите все пары простых чисел p, q такие, что $p^2 + pq + q^2$ – точный квадрат.

8. Каждая точка плоскости покрашена в один из k цветов так, что на каждой прямой встречаются точки не более чем двух цветов. При каком наибольшем k это возможно?

Восьмой Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 17-24.09.2013

Первый тур. Премьер-лига. 18 сентября 2013 г.

1. В бесконечной десятичной дроби после запятой встречаются только цифры 0, 1, 2. Известно, что если все цифры 0 заменить на 1, то получится периодическая десятичная дробь (возможно, с предпериодом), и если все цифры 1 заменить на 2, то тоже получится периодическая десятичная дробь. Следует ли отсюда, что исходная дробь периодическая?

2. При каких натуральных $n \geqslant 2$ в любой последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ натуральных чисел с суммой $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2n - 1$ можно найти несколько (более одного) чисел, стоящих подряд, среднее арифметическое которых натурально?

3. Касательные, проведенные из точки P к окружности с центром O, касаются окружности в точках A и B. Точка C лежит на меньшей дуге AB. Перпендикуляр к прямой PC, восставленный в точке C, пересекает биссектрисы углов AOC и BOC в точках D и E. Докажите, что $CD = CE$.

4. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки P, Q, R, S соответственно. Отрезки PR и QS пересекаются в точке T. Оказалось, что четырёхугольники $APTS$, $BQTP$, $CRTQ$ и $DSTR$ — описанные. Докажите, что и четырёхугольник $ABCD$ — описанный.

5. Можно ли разбить квадрат 2013×2013 на прямоугольники 1×3 так, чтобы количества горизонтальных и вертикальных прямоугольников отличались на 1?

6. Докажите, что если числа a и b положительны и меньше 1, то $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + 1 > 3ab$.

7. Найдите все пары простых чисел p, q такие, что $p^2 + pq + q^2$ – точный квадрат.

8. Каждая точка плоскости покрашена в один из k цветов так, что на каждой прямой встречаются точки не более чем двух цветов. При каком наибольшем k это возможно?