Восьмой Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 17-24.09.2013

Второй тур. Премьер-лига. 19 сентября 2013 г.

1. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC с углом $\angle ACB = 120°$. На отрезках AC и BC выбраны соответственно точки P и Q такие, что $AP = PQ = QB$. Докажите, что $\angle PMQ = 90°$.

2. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности. Прямая AI вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке L. Описанная окружность треугольника CIL пересекает отрезок BI в точке K. Докажите, что $BK = CK$.

3. Вершины равностороннего треугольника лежат на гиперболе $y = 1/x$. Пусть a равно сумме абсцисс, а b – сумме ординат трех вершин треугольника. Чему может равняться произведение ab?

4. На окружности отмечены несколько точек и несколько треугольников с вершинами в отмеченных точках. Оказалось, что для любых шести отмеченных точек все отмеченные треугольники, у которых все вершины лежат в этих шести точках, имеют общую вершину. Докажите, что все отмеченные треугольники имеют общую вершину.

5. Найдите наименьшее натуральное число k, для которого число $k^{2013k} + 1$ делится на 2^{2013}.

6. Докажите, что каждый квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом можно представить в виде суммы трех квадратных трехчленов с дискриминантом 0 и равными старшими коэффициентами.

7. В клетках квадрата 100×100 расставлены натуральные числа, сумма которых нечетна. Докажите, что можно найти уголок из трех клеток, сумма чисел в которых нечетна.

8. Сколько существует упорядоченных наборов $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ натуральных чисел, не превосходящих 101 и таких, что все три числа $x_1x_2 + y_1y_2$, $x_2x_3 + y_2y_3$ и $x_3x_1 + y_3y_1$ дают остаток 1 при делении на 101?

Восьмой Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 17-24.09.2013

Второй тур. Премьер-лига. 19 сентября 2013 г.

1. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC с углом $\angle ACB = 120°$. На отрезках AC и BC выбраны соответственно точки P и Q такие, что $AP = PQ = QB$. Докажите, что $\angle PMQ = 90°$.

2. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности. Прямая AI вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке L. Описанная окружность треугольника CIL пересекает отрезок BI в точке K. Докажите, что $BK = CK$.

3. Вершины равностороннего треугольника лежат на гиперболе $y = 1/x$. Пусть a равно сумме абсцисс, а b – сумме ординат трех вершин треугольника. Чему может равняться произведение ab?

4. На окружности отмечены несколько точек и несколько треугольников с вершинами в отмеченных точках. Оказалось, что для любых шести отмеченных точек все отмеченные треугольники, у которых все вершины лежат в этих шести точках, имеют общую вершину. Докажите, что все отмеченные треугольники имеют общую вершину.

5. Найдите наименьшее натуральное число k, для которого число $k^{2013k} + 1$ делится на 2^{2013}.

6. Докажите, что каждый квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом можно представить в виде суммы трех квадратных трехчленов с дискриминантом 0 и равными старшими коэффициентами.

7. В клетках квадрата 100×100 расставлены натуральные числа, сумма которых нечетна. Докажите, что можно найти уголок из трех клеток, сумма чисел в которых нечетна.

8. Сколько существует упорядоченных наборов $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ натуральных чисел, не превосходящих 101 и таких, что все три числа $x_1x_2 + y_1y_2$, $x_2x_3 + y_2y_3$ и $x_3x_1 + y_3y_1$ дают остаток 1 при делении на 101?