Восьмой Южный математический турнир
ВДЦ “Орлёнок”, 17-24.09.2013

Третий тур. Премьер-лига. 21 сентября 2013 г.

1. На плоскости отмечены вершины выпуклого n-угольника и лежащего внутри него выпуклого m-угольника так, что никакие три из $m+n$ отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что если натуральное k удовлетворяет неравенству $k^2-k+1 \leqslant m+n$, то существует выпуклый $(k+1)$-угольник с вершинами в отмеченных точках, внутри которого не лежит никакая другая отмеченная точка.

2. Какое наименьшее число ладей можно расставить на клетчатой доске 100×100 так, чтобы каждое свободное поле было побито ровно тремя ладьями? (Ладья бьет поля по горизонтали и вертикали, если между ней и полем нет других ладей.)

3. Можно ли расставить на ребрах куба 12 последовательных натуральных чисел так, чтобы сумма чисел на любых трёх рёбрах, имеющих общую вершину, была степенью двойки с натуральным показателем?

4. В плоскости треугольника ABC выбрана точка K. Точки A_1, B_1, C_1 – проекции точки K на прямые, содержащие высоты треугольника ABC, проведённые из вершин A,B,C соответственно. Точку K будем называть *хорошей*, если $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Докажите, что если три точки на плоскости хорошие, то и ортоцентр образованного ими треугольника – тоже хорошая точка.

5. Числа a, b, c положительны. Докажите, что $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}<1$.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, симметричный относительно диагонали BD. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AD в точках K и L соответственно, а прямая m пересекает луч CB и отрезок CD в точках M и N соответственно. Известно, что прямые ℓ и m симметричны относительно прямой AC. Докажите, что $KM \parallel LN$.

7. В классе некоторые мальчики дружат с некоторыми девочками (дружба взаимна). На уроке все ученики сидят за партами – по одному или по двое за партой. Множество девочек A назовем *хорошим*, если класс можно пересадить так, чтобы каждая девочка из A сидела за партой со своим другом-мальчиком. Аналогично, множество мальчиков B назовем хорошим, если можно пересадить класс так, чтобы каждый мальчик из B сидел за партой со своей подругой-девочкой. Известно, что множество всех мальчиков класса не является хорошим. Докажите, что можно перевести одного из мальчиков в другой класс так, чтобы каждое хорошее множество девочек осталось хорошим.

8. Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что b^3+c^3 делится на a^2, c^3+a^3 делится на b^2 и a^3+b^3 делится на c^2.