

1. На доске выписано 10 попарно различных натуральных чисел, одно из которых равно 1001. Оказалось, что если выписаны числа a и b ($a < b$), то число $b-a$ тоже выписано. Какие значения может принимать наибольшее из выписанных чисел?

2. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz}$$

при положительных x, y, z .

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с единичными сторонами середины P, Q сторон AB, CD и середины S, T сторон BC, DE соединены отрезками PQ и ST . Пусть M и N – середины отрезков PQ и ST . Какие значения может принимать длина отрезка MN ?

4. Сколькими способами можно расставить целые неотрицательные числа во всех клетках таблицы 10×10 так, чтобы (i) каждые два числа в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более, чем на 1, и (ii) каждое число, не превосходящее ни одного числа в соседних по стороне клетках, было равно 0?

5. В выпуклом n -угольнике отметили 5 вершин таким образом, что для каждого натурального числа k от 1 до 20 можно найти две отмеченные вершины, между которыми в одном из направлений находится ровно k сторон многоугольника. Чему могло быть равно n ? Приведите ответ и примеры отмеченных вершин для каждого варианта ответа.

6. Найдите наименьшее натуральное $n \geq 10$ такое, что остаток от деления числа 2^{2^n} на $2^n - 1$ не является степенью числа 4 с натуральным показателем?

7. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC , в котором $\angle A = \alpha < \angle B = \beta < \angle C = \gamma$. Серединный перпендикуляр к AB пересекает сторону AC в точке D . Точка E лежит на прямой AM так, что прямые DE и AB параллельны. Найдите $\angle CBE$.

8. 1000 бусинок лежат в 79 расположенных в ряд чашках, хотя бы две из которых не пустые. Разрешается взять из любой чашки 13 или 66 бусинок (если в ней столько есть) и переложить все эти бусинки в любую другую чашку. Оказалось, что такими операциями невозможно собрать все бусинки в одной чашке. Сколько всего вариантов распределения числа бусинок по чашкам?

9. Найдите все натуральные g такие, что при каждом нечётном простом p найдётся натуральное n , для которого оба числа $g^n - n$ и $g^{n+1} - (n+1)$ делятся на p .

11. Найдите все пары целых чисел a и b , для которых выполняется строгое неравенство $a^2 + b^2 + a^2 b^2 > 3(a+b)^2/4$.

13. На доске 8×8 отмечено 13 чёрных клеток. Клетчатый прямоугольник назовём «чёрным», если он содержит две чёрные клетки, стоящие в его противоположных углах (ширина «чёрного» прямоугольника может быть равна 1). Для какого наименьшего n можно так расставить исходные 13 чёрных клеток, чтобы в каждом «чёрном» прямоугольнике было не более n чёрных клеток? *Приведите ответ и пример.*

15. В треугольнике ABC $\angle ABC = 120^\circ$. Биссектриса этого угла пересекает сторону AC в точке M , а биссектриса угла, смежного с углом BCA , пересекает прямую AB в точке P . Отрезок MP пересекает сторону BC в точке K . Какие значения может принимать $\angle AKM$?

10. 10 математиков ведут научную переписку. Любая пара учёных переписывается либо только на русском, либо только на английском, либо только на французском языке. Приведите пример с наибольшим количеством пар, ведущих переписку на русском языке, если нет трёх учёных, ведущих попарно друг с другом переписку на одном и том же языке.

12. Приведите пример 13 подряд идущих натуральных чисел, меньших 1000, таких, что у каждого из них есть простой делитель, меньший 13.

14. Дано натуральное число $n > 10$. Вокруг стола сидят n человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих n людей пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. При каких n по всем этим бумажкам можно наверняка установить, на ком какой колпак надет?

16. Есть набор из 2019 гирь разного веса, в котором среди любых четырёх гирь самая тяжёлая весит меньше, чем три другие, вместе взятые. Назовём гирю *хорошей*, если среди остальных 2018 гирь есть ровно вдвое более лёгкая. Какое наибольшее количество хороших гирь могло быть?