XIX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XVI Турнир математических игр. Математическая игра «Дуэль».
<u>Младшая лига (7-9 классы).</u> 10 сентября 2023 года.

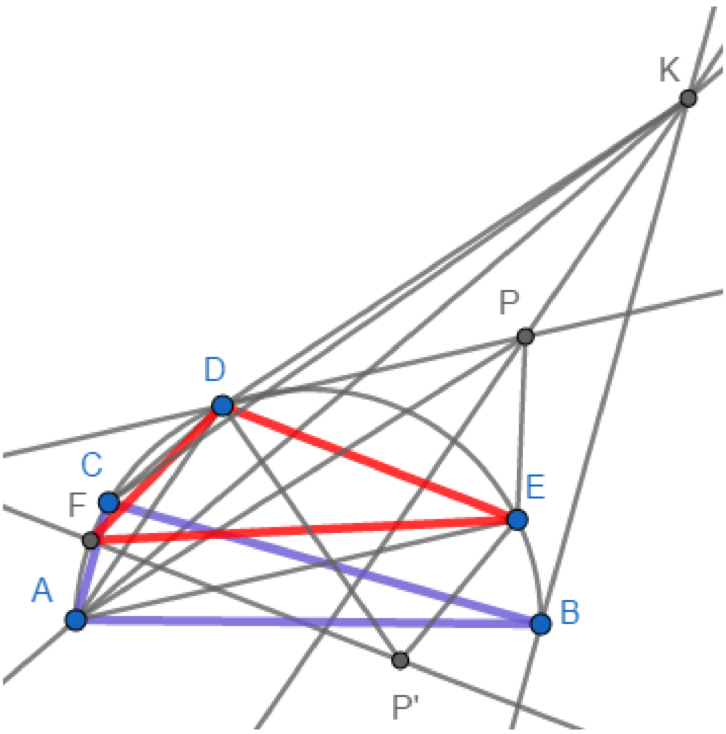
1. Разрежьте прямоугольный треугольник с углом 10° на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных.

2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 10 ладей так, чтобы каждая ладья била ровно одну ладью? *Ответ дать числом в десятичной записи.*

3. На клетчатой плоскости по линиям сетки нарисован прямоугольник так, что его периметр (в сторонах клеток) численно в 3 раза меньше площади (в клетках). Какие размеры могут быть у этого прямоугольника?

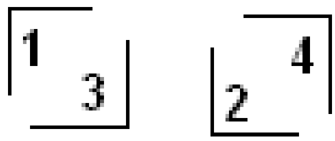
4. Решите неравенство $[x]+[2x]+[3x]+\ldots+[2023x]\geq 2023$, где $[t]$ – целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t.

5. На чертеже приведено решение следующей задачи: «Постройте два равновеликих, но неравных друг другу треугольника ABC и DEF, вписанных в полуокружность с диаметром AB, если изначально отмечены точки A, B, C, D, E.» Опишите по чертежу алгоритм последовательных переносов точек (по одной), соблюдая порядок вершин равновеликих треугольников в виде ($ABC \to \ldots \to EFD$).



6. Укажите все шестёрки чисел a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, для которых выполняется равенство $a_1b_1+a_2b_2 = a_1c_1+a_2c_2 = b_1c_1+b_2c_2 = 0$.

7. При каких натуральных n всю клетчатую решетку $n\times n$ можно сложить из равного количества уголков четырёх видов, состоящих из двух отрезков – двух соседних сторон клетки (см. рис.)? Уголки могут только соприкасаться своими концами, но не могут накладываться друг на друга. Приведите ответ и примеры для трёх самых маленьких по размеру таблиц с указанием номеров уголков (на листке для ответов удвоенного размера).



8. На шахматной доске стоят 8 ферзей, не бьющих друг друга. Сколько из них могут стоять на чёрных клетках?

9. Расставьте в записи 1234567890 скобки и знаки арифметических действия (+, –, ×, ;) так, чтобы получилось ровно 2023.

10. Назовём число из 10 различных цифр *богатым*. Приведите пример (и изменение) богатого числа, в котором каждую цифру изменили (увеличили или уменьшили) так, что набор чисел всех 10 изменений совпадает с набором всех целых чисел от 0 до 9 и при этом получилось другое богатое число.

11. Точки M и N – соответственно середины сторон AB=14 и BC=8 треугольника ABC. Оказалось, что центр вневписанной окружности треугольника BMN, касающейся MN, лежит на отрезке AC. Найдите AC.

12. Сколько существует троек натуральных чисел a, b и c, для которых выполняется неравенство $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}<\frac{19}{20}$? Порядок чисел в тройке важен.

13. Сколько существует чётных натуральных чисел, кратных 2023, имеющих ровно 2023 различных натуральных делителя?

14. $ABCD$ – прямоугольная трапеция, у которой основание CD в 2 раза больше основания AB, а BD – биссектриса угла ABC. Какие значения может принимать $\angle DBC$?

15. На плоскости отмечены $k\geq 2$ точек с целочисленными координатами. Для каждой пары точек строятся все точки, делящие этот отрезок на $n\geq 2$ равных частей. При каком наименьшем k среди всех новых точек гарантированно найдётся точка с целочисленными координатами?

16. В однокруговом футбольном турнире участвуют 18 команд, разбиваясь в каждом туре на 9 пар. После какого наибольшего количества туров ещё гарантированно найдутся три команды, не сыгравшие между собой ни одного матча?