XIX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XVI Турнир математических игр. Математическая игра «Дуэль».
Старшая лига (10-11 классы). ***10 сентября 2023 года.***

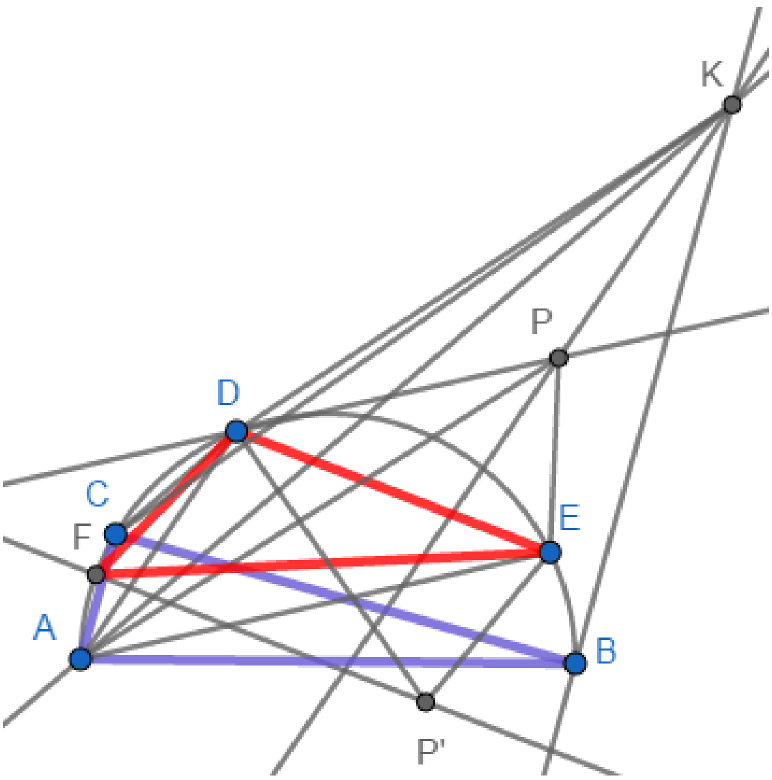
1. На диагоналях параллелограмма $ABCD$ (AB=2, BC=3) как на основаниях построены равносторонние треугольники ACM и BDN. Чему может равняться длина отрезка MN?

2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 10 ладей так, чтобы каждая ладья била ровно одну ладью? *Ответ дать числом в десятичной записи.*

3. В шахматном турнире участвовали ученики нескольких школ. Каждые два ученика из разных школ сыграли между собой одну партию. Количества мальчиков и девочек, участвовавших в турнире, отличаются на 1, а количество партий между участниками одного пола, отличается от количества партий, сыгранных между участниками разного пола, не более чем на 3. Какое наибольшее количество школ могло выставить на турнир нечётное число участников?

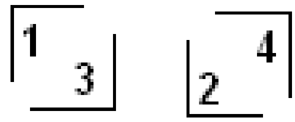
4. Решите неравенство $[x]+[2x]+[3x]+\ldots+[2023x]\geq 2023$, где $[t]$ – целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t.

5. На чертеже приведено решение следующей задачи: «Постройте два равновеликих, но неравных друг другу треугольника ABC и DEF, вписанных в полуокружность с диаметром AB, если изначально отмечены точки A, B, C, D, E.» Опишите по чертежу алгоритм последовательных переносов точек (по одной), соблюдая порядок вершин равновеликих треугольников в виде ($ABC \to \ldots \to EFD$).



6. Укажите все шестёрки чисел a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, для которых выполняется равенство $a_1b_1+a_2b_2 = a_1c_1+a_2c_2 = b_1c_1+b_2c_2 = 0$.

7. При каких натуральных n всю клетчатую решетку $n \times n$ можно сложить из равного количества уголков четырёх видов, состоящих из двух отрезков – двух соседних сторон клетки (см. рис.)? Уголки могут только соприкасаться своими концами, но не могут накладываться друг на друга. Приведите ответ и примеры для трёх самых маленьких по размеру таблиц с указанием номеров уголков (на листке для ответов удвоенного размера).



8. На шахматной доске стоят 8 ферзей, не бьющих друг друга. Сколько из них могут стоять на чёрных клетках?

9. На плоскости отмечены $k \geq 2$ точек с целочисленными координатами. Для каждой пары точек строятся все точки, делящие этот отрезок на $n \geq 2$ равных частей. При каком наименьшем k среди всех новых точек гарантированно найдётся точка с целочисленными координатами?

10. Назовём число из 10 различных цифр *богатым*. Приведите пример (и изменение) богатого числа, в котором каждую цифру изменили (увеличили или уменьшили) так, что набор чисел всех 10 изменений совпадает с набором всех целых чисел от 0 до 9 и при этом получилось другое богатое число.

11. Проведите через вершину A остроугольного треугольника ABC прямую так, чтобы она не пересекала сторону BC и чтобы сумма расстояний до неё от вершин B и C была наибольшей.

12. Сколько существует троек натуральных чисел a, b и c, для которых выполняется неравенство $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}<\frac{19}{20}$? Порядок чисел в тройке важен.

13. Найдите наибольшее составное число n такое, что если $a_1+a_2+\ldots+a_{1000}=n$ при некоторых натуральных a_1, a_2, ..., a_{1000}, то эти 1000 чисел взаимно просты в совокупности.

14. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) продолжения биссектрис AK и CL касаются окружностей, симметричных вписанной окружности треугольника относительно сторон BC и AB соответственно. Найдите углы треугольника ABC.

15. При каком наибольшем значении параметра p неравенство $p(x-2y) \leq (x-y)^2$ выполняется при всех действительных x и y таких, что $x \geq y \geq 1$?

16. В однокруговом футбольном турнире участвуют 18 команд, разбиваясь в каждом туре на 9 пар. После какого наибольшего количества туров ещё гарантированно найдутся три команды, не сыгравшие между собой ни одного матча?

17. (бонус) Десятизначное число $\overline{a_1a_2a_3...a_{10}}$ из различных цифр разбивают на 9 двузначных чисел и находят их произведение $\overline{a_1a_2}\cdot\overline{a_2a_3}\cdot...\cdot\overline{a_9a_{10}}$. У какого наименьшего десятизначного числа из различных цифр подобное произведение будет наибольшим?