XVI Южный математический турнир. «Лицей Сириус»

Гранд-лига. 1 тур. 03.10.2021.

1. На окружности длины 1 сидит кузнечик. Каждую секунду он делает прыжок, перемещаясь на дугу данной иррациональной длины α против часовой стрелки. Для каждого натурального k кузнечик помечает точку, в которую он попадает на k-м прыжке, числом k. Кузнечик сделал n прыжков и остановился. Оказалось, что ближайшие к нему с двух сторон отмеченные точки помечены числами a и b. Докажите, что $a + b \leqslant n$.

2. В графе с n вершинами максимальная клика состоит из k вершин. Докажите, что количество всевозможных клик в этом графе (включая пустую) не превосходит $3^{\frac{n+k}{3}}$.

3. Для натурального $n > 1$ рассмотрим правильный многоугольник с $2^n - 1$ вершинами $A_0A_1A_2 \ldots A_{2^n-2}$. Докажите равенство
$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} + \ldots + \frac{1}{A_0A_{2^{n-1}}}.$$

4. Найдите все натуральные n, которые разбиваются в сумму степеней двойки с учётом порядка нечётным числом способов. (Например, у числа 4 шесть разбиений: $4 = 4 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.)

5. Арним задумал натуральное число x, сумма цифр которого равна 2021, а Брентано угадывает его. При своём ходе Брентано называет выбранное им число a, а Арним сообщает ему сумму цифр числа $|x-a|$. За какое наименьшее число ходов Брентано гарантированно сумеет отгадать число Арнима?

6. Карлсон, Малыш и Фрекен Бок играют в игру. У них есть шоколадка 2022×2022. Начинает Карлсон. За ход можно разделить какой-нибудь из имеющихся прямоугольных кусков на несколько попарно различных прямоугольных частей по сторонам клеток. Когда никто не может сделать ход, игра заканчивается. Карлсон получает все имеющиеся прямоугольники 1×2, Малыш — квадраты 1×1, Фрекен Бок — квадраты 2×2. Докажите, что Карлсон может получить самую большую долю шоколадки при любой игре противников.

7. Дан равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ ($AB = AC$). X — произвольная точка прямой BC, не совпадающая с B и C. P и Q — проекции X на AB и AC соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $\triangle ABQ$ и $\triangle ACP$ пересекаются на прямой AX.

8. Последовательность $\{a_n\}$ называется простой, если a_n является некоторым простым делителем n. Существует ли простая последовательность, обладающая следующим свойством: для любого натурального k найдётся лишь конечное количество таких пар ($i \neq j$), что $a_i = a_j$ и $|i - j| < k$?

9. Положительные числа a, b и некоторые вещественные числа A, B удовлетворяют условиям $|A - 3a| \leqslant 1 - a$, $|B - 3b| \leqslant 1 - b$. Докажите, что
$$\left|\frac{AB}{3} - 3ab\right| \leqslant 1 - ab.$$

10. Вписанная окружность ω треугольника ABC с центром I касается стороны BC в точке D. Серединный перпендикуляр к DI пересекает описанную окружность Γ треугольника ABC в точках P, Q. Прямые p, q касаются Γ в точках P, Q, а прямые l, m, пересекающиеся в точке S, параллельны p, q соответственно и касаются ω, причём I лежит не между p, l и не между q, m. Прямая SA вторично пересекает Γ в точке K. Докажите, что четырехугольник $AIDK$ вписанный.