XVI ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Лицей «Сириус»

Первая Старт-лига. 1 тур. 03.10.2021

1. AB — большее, а CD — меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что $BC = 2 \cdot AD$ и сумма углов DAB и ABC равна 120°. Докажите, что угол DAB — прямой.

2. Незнайка утверждает, что нашёл несколько несократимых дробей таких, что сумма всех дробей с нечётными знаменателями равна произведению всех дробей с чётными знаменателями. Мог ли Незнайка оказаться прав?

3. Натуральные числа n и k таковы, что $S(3n) = k \cdot S(n)$, где $S(x)$ — сумма цифр натурального числа x. Чему может быть равно k?

4. Разность двух неотрицательных чисел не меньше суммы их кубов. Какое наибольшее значение может принимать сумма их квадратов?

5. Барон Мюнхгаузен утверждает, что существует выпуклый пятиугольник, внутри которого есть точка, расстояние от которой до любой вершины пятиугольника равно стороне, противоположной этой вершине. Прав ли барон?

6. Какое наибольшее значение может принимать шестизначное число $\overline{\text{ТУРНИР}}$, если $\text{С} \cdot \text{И} \cdot \text{Р} \cdot \text{И} \cdot \text{У} \cdot \text{С} = \text{Т} \cdot \text{У} \cdot \text{Р} \cdot \text{Н} \cdot \text{И} \cdot \text{Р}$? (одинаковые буквы — одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры)

7. Какое наименьшее число клеток доски 11×11 нужно закрасить так, чтобы в каждом прямоугольнике 3×5 была хотя бы одна закрашенная клетка?

8. В секции занимаются 45 юных теннисистов. Во время тренировки каждый с каждым сыграл не более двух партий, при этом никто ни у кого не выиграл дважды, но каждый выиграл хотя бы 23 партии (в теннисе ничьих не бывает). Оказалось, что ровно 35 из них не проиграли тем, у кого сами выиграли. Верно ли, что среди остальных 10 теннисистов каждые двое обыграли друг друга по разу?

XVI ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Лицей «Сириус»

Высшая Старт-лига. 1 тур. 03.10.2021

1. Какое наименьшее число клеток доски 11×11 нужно закрасить так, чтобы в каждом прямоугольнике 3×5 была хотя бы одна закрашенная клетка?

2. В секции занимаются 45 юных теннисистов. Во время тренировки каждый с каждым сыграл не более двух партий, при этом никто ни у кого не выиграл дважды, но каждый выиграл хотя бы 23 партии (в теннисе ничьих не бывает). Оказалось, что ровно 35 из них не проиграли тем, у кого сами выиграли. Верно ли, что среди остальных 10 теннисистов каждые двое обыграли друг друга по разу?

3. Натуральные числа n и k таковы, что $S(3n) = k \cdot S(n)$, где $S(x)$ — сумма цифр натурального числа x. Чему может быть равно k?

4. Разность двух неотрицательных чисел не меньше суммы их кубов. Какое наибольшее значение может принимать сумма их квадратов?

5. Барон Мюнхгаузен утверждает, что существует выпуклый пятиугольник, внутри которого есть точка, расстояние от которой до любой вершины пятиугольника равно стороне, противоположной этой вершине. Прав ли барон?

6. Какое наибольшее значение может принимать шестизначное число $\overline{\text{ТУРНИР}}$, если С $\cdot$ И $\cdot$ Р $\cdot$ И $\cdot$ У $\cdot$ С = Т $\cdot$ У $\cdot$ Р $\cdot$ Н $\cdot$ И $\cdot$ Р? (одинаковые буквы - одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры)

7. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка K, а на луче AK, пересекающем сторону CD, взята точка L. Оказалось, что $AB = CK$, и треугольник KCL прямоугольный равнобедренный ($KC = CL$). Найдите угол ABK.

8. Сколько существует троек целых чисел (a, b, c), для которых выполняются равенства $a = bc + 11$, $b = 13 - ca$?