Шестнадцатый Южный математический турнир

Сириус, 1–9.10.2021

Второй тур. Премьер-лига. 4 октября 2021 г.

1. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ любое множество из n^2 точек на плоскости можно разбить на n непустых подмножеств так, что выпуклые оболочки любых двух из этих подмножеств имеют общую точку.

2. Возрастающая последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$ такова, что $a_n \leqslant n + 2021$ и $n^3 a_n - 1$ делится на a_{n+1} при всех натуральных n. Докажите, что $a_n = n$ при всех натуральных n.

3. При каких $n \geqslant 3$ верно следующее утверждение: среди любых n отрезков, самый длинный из которых не более чем в n раз длиннее самого короткого, можно выбрать три, являющиеся сторонами остроугольного треугольника?

4. В компании n человек. Если рассадить любых четырёх из них за круглый стол, найдётся человек, который знает обоих своих соседей, или человек, который не знает ни одного из своих соседей. Докажите, что можно разбить компанию на две части, в одной из которых все друг друга знают, а в другой никто никого не знает.

5. Средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне BC, пересекает описанную окружность треугольника в точках P и Q, а касательная к описанной окружности в точке A пересекает BC в точке T. Докажите, что $\angle BTQ = \angle PTA$.

6. В арифметической прогрессии a_1, a_2, $\ldots$, a_n с целыми членами a_i делится на i при всех i от 1 до $n - 1$, но a_n не делится на n. Докажите, что n – степень простого числа.

7. Среди 2021 сотрудников корпорации "Альтаир" 1400 некомпетентных. Президент корпорации знает об этом и хочет выявить хотя бы одного некомпетентного сотрудника. Имеется множество заданий, для выполнения каждого из которых нужны ровно три сотрудника. Задание будет провалено, если хотя бы один из трёх сотрудников некомпетентен. Каждый день президент выдаёт задание трём сотрудникам, чтобы посмотреть, провалят они его или нет. Докажите, что он сможет достичь своей цели за 7 лет.

8. Из точки A окружности с центром O проведены хорда AB и диаметр AD. Точка C – середина меньшей дуги AB. Прямые AC и BD пересекаются в точке E. Докажите, что $OE^2 = OB^2 + 2 \cdot OB \cdot OE$.

Шестнадцатый Южный математический турнир

Сириус, 1–9.10.2021

Второй тур. Премьер-лига. 4 октября 2021 г.

1. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ любое множество из n^2 точек на плоскости можно разбить на n непустых подмножеств так, что выпуклые оболочки любых двух из этих подмножеств имеют общую точку.

2. Возрастающая последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$ такова, что $a_n \leqslant n + 2021$ и $n^3 a_n - 1$ делится на a_{n+1} при всех натуральных n. Докажите, что $a_n = n$ при всех натуральных n.

3. При каких $n \geqslant 3$ верно следующее утверждение: среди любых n отрезков, самый длинный из которых не более чем в n раз длиннее самого короткого, можно выбрать три, являющиеся сторонами остроугольного треугольника?

4. В компании n человек. Если рассадить любых четырёх из них за круглый стол, найдётся человек, который знает обоих своих соседей, или человек, который не знает ни одного из своих соседей. Докажите, что можно разбить компанию на две части, в одной из которых все друг друга знают, а в другой никто никого не знает.

5. Средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне BC, пересекает описанную окружность треугольника в точках P и Q, а касательная к описанной окружности в точке A пересекает BC в точке T. Докажите, что $\angle BTQ = \angle PTA$.

6. В арифметической прогрессии a_1, a_2, $\ldots$, a_n с целыми членами a_i делится на i при всех i от 1 до $n - 1$, но a_n не делится на n. Докажите, что n – степень простого числа.

7. Среди 2021 сотрудников корпорации "Альтаир" 1400 некомпетентных. Президент корпорации знает об этом и хочет выявить хотя бы одного некомпетентного сотрудника. Имеется множество заданий, для выполнения каждого из которых нужны ровно три сотрудника. Задание будет провалено, если хотя бы один из трёх сотрудников некомпетентен. Каждый день президент выдаёт задание трём сотрудникам, чтобы посмотреть, провалят они его или нет. Докажите, что он сможет достичь своей цели за 7 лет.

8. Из точки A окружности с центром O проведены хорда AB и диаметр AD. Точка C – середина меньшей дуги AB. Прямые AC и BD пересекаются в точке E. Докажите, что $OE^2 = OB^2 + 2 \cdot OB \cdot OE$.