**Шестнадцатый Южный математический турнир**

**Сириус, 1–9.10.2021**

*Третий тур. Премьер-лига. 6 октября 2021 г.*

1. $AD$, $BE$, $CF$ — высоты остроугольного треугольника $ABC$. На отрезках $DF$ и $EF$ выбраны точки $P$ и $Q$ соответственно таким образом, что $\angle PAQ = \angle DAC$. Докажите, что $AP$ — биссектриса угла $FPQ$.

2. Три окружности внутренним образом касаются описанной окружности треугольника $ABC$ в точках $T_a$, $T_b$, $T_c$, а сторон $BC$, $CA$ и $AB$ – в точках $P_a$, $P_b$, $P_c$ соответственно. Касательные к описанной окружности в точках $T_a$, $T_b$, $T_c$ пересекают прямые $BC$, $CA$, $AB$ в точках $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ соответственно. Докажите, что если прямые $AP_a$, $BP_b$, $CP_c$ пересекаются в одной точке, то точки $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ лежат на одной прямой.

3. У Оракула есть клетчатая доска размера $100 \times 100$, каждая клетка которой покрашена в чёрный или белый цвет. Угадывающая не видит доски, но может выбрать пару клеток соседних по ребру и спросить, одноцветная эта пара или нет. Какое минимальное количество вопросов понадобится Угадывающей, чтобы узнать чётность количества пар соседних клеток, цвета которых не совпадают друг с другом?

4. Найдите целую часть суммы $\sum_{k=2}^{2021} \sqrt{1+\frac{2}{k^2}}$.

5. Дано нечётное простое число $p$. Докажите, что существует натуральное $n$, для которого $1^n+2^n+\ldots+(p-1)^n$ делится на $p^3$.

6. Решите в натуральных числах уравнение $a^2+b+3=(b^2-c^2)^2$.

7. В гостиничном номере есть несколько ламп, некоторые из которых включены, и $k$ выключателей. Каждый выключатель соединён с несколькими лампами, и при нажатии на него состояния всех этих ламп изменяются (то есть выключенные лампы включаются, а включенные выключаются). Известно, что с каждой лампой соединены ровно 100 выключателей. Администратор гарантирует, что можно нажать на какие-то выключатели и все лампы включатся. Докажите, что можно добиться этого, сделав не более $k/2$ нажатий.

8. В каждой вершине многогранника с нечётным числом граней сходятся ровно 3 ребра. Докажите, что можно поставить в каждой вершине рациональное число так, чтобы хотя бы в одной из вершин оказалось число 2021, и на каждой грани произведение всех чисел, стоящих в её вершинах, было равно 1.

**Шестнадцатый Южный математический турнир**

**Сириус, 1–9.10.2021**

*Третий тур. Премьер-лига. 6 октября 2021 г.*

1. $AD$, $BE$, $CF$ — высоты остроугольного треугольника $ABC$. На отрезках $DF$ и $EF$ выбраны точки $P$ и $Q$ соответственно таким образом, что $\angle PAQ = \angle DAC$. Докажите, что $AP$ — биссектриса угла $FPQ$.

2. Три окружности внутренним образом касаются описанной окружности треугольника $ABC$ в точках $T_a$, $T_b$, $T_c$, а сторон $BC$, $CA$ и $AB$ – в точках $P_a$, $P_b$, $P_c$ соответственно. Касательные к описанной окружности в точках $T_a$, $T_b$, $T_c$ пересекают прямые $BC$, $CA$, $AB$ в точках $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ соответственно. Докажите, что если прямые $AP_a$, $BP_b$, $CP_c$ пересекаются в одной точке, то точки $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ лежат на одной прямой.

3. У Оракула есть клетчатая доска размера $100 \times 100$, каждая клетка которой покрашена в чёрный или белый цвет. Угадывающая не видит доски, но может выбрать пару клеток соседних по ребру и спросить, одноцветная эта пара или нет. Какое минимальное количество вопросов понадобится Угадывающей, чтобы узнать чётность количества пар соседних клеток, цвета которых не совпадают друг с другом?

4. Найдите целую часть суммы $\sum_{k=2}^{2021} \sqrt{1+\frac{2}{k^2}}$.

5. Дано нечётное простое число $p$. Докажите, что существует натуральное $n$, для которого $1^n+2^n+\ldots+(p-1)^n$ делится на $p^3$.

6. Решите в натуральных числах уравнение $a^2+b+3=(b^2-c^2)^2$.

7. В гостиничном номере есть несколько ламп, некоторые из которых включены, и $k$ выключателей. Каждый выключатель соединён с несколькими лампами, и при нажатии на него состояния всех этих ламп изменяются (то есть выключенные лампы включаются, а включенные выключаются). Известно, что с каждой лампой соединены ровно 100 выключателей. Администратор гарантирует, что можно нажать на какие-то выключатели и все лампы включатся. Докажите, что можно добиться этого, сделав не более $k/2$ нажатий.

8. В каждой вершине многогранника с нечётным числом граней сходятся ровно 3 ребра. Докажите, что можно поставить в каждой вершине рациональное число так, чтобы хотя бы в одной из вершин оказалось число 2021, и на каждой грани произведение всех чисел, стоящих в её вершинах, было равно 1.