XVI Южный математический турнир. «Лицей Сириус»

Гранд-лига. Бои за 5-8 места. 07.10.2021.

1. Дан параллелограмм $ABCD$ с центром S. Точка X расположена на продолжении BC за точку B, точка Y расположена на продолжении CD за точку D. В углы XBA и YDA вписаны окружности ω_1 и ω_2. Известно, что отрезки касательных, проведенных из S к ω_1 и ω_2, равны. Докажите, что AC перпендикулярна линии центров ω_1 и ω_2.

2. Дан треугольник $\triangle ABC$. Пусть Γ - его описанная окружность, γ - его окружность Эйлера. Прямая Эйлера треугольника $\triangle ABC$ пересекает γ в точках X и Y. Касательные к γ в X и Y пересекают Γ в парах точек M, N и R, S. Докажите, что окружности Эйлера треугольников $\triangle ABC$, $\triangle AMN$, $\triangle ARS$ пересекаются в одной точке.

3. Пусть есть граф на $2n$ вершинах, в котором каждое ребро покрашено в синий или красный цвет. Синие рёбра образуют полное паросочетание, а красные рёбра образуют дерево, содержащее все вершины графа. Докажите, что найдётся цветочередующийся цикл (чётной длины).

4. Для действительного $1 < k < 2$ определим последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом: $b_1 = 1$, $b_2 = k$ и $b_{n+2} = \dfrac{b_{n+1}^2 - 1}{b_n}$. Обязательно ли эта последовательность ограничена?

5. Найдите все пары простых (p, q), для которых $p^{q+1} + q^{p+1}$ является точным квадратом.

6. Найдите все такие натуральные числа n, что для некоторого натурального $k \geq 2$ найдутся k положительных рациональных чисел, как сумма, так и произведение которых равно n.

7. Даны различные натуральные числа m и n. В клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены все натуральные числа по одному разу. Докажите, что на плоскости можно выделить два прямоугольника $m \times n$ (расположенных как угодно), в которых одно и то же наибольшее число.

8. В царстве «Сменяемость и Преемственность» имеется n кандидатов в депутаты парламента. Каждый год в стране выбирают парламент, состоящий из некоторых из этих кандидатов. В каждом из ранее избиравшихся парламентов должен быть ровно один депутат, которого не было в этом. Докажите, что это не может продолжаться больше n лет.

9. Вершины k-угольника пусты. Два игрока по очереди ставят нули и единицы в его вершины, не снабженные числами ранее. Первый игрок начинает игру и выигрывает, если ему удаётся поставить три одинаковых числа в три последовательные вершины. Второй игрок выигрывает, если к моменту, когда все вершины снабжены числами, первый игрок не добился своей цели. При каких k у первого игрока есть выигрышная стратегия?

10. Найдите наибольшее вещественное α, для которого существует возрастающая последовательность нечётных натуральных чисел $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \ldots$ со следующим свойством: для каждого n число a_n – наибольшее натуральное число, строго меньшее αa_{n+1}.