XVI Южный математический турнир. «Лицей Сириус»

Гранд-лига. Полуфинал. 07.10.2021.

1. В данный двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β, вписана фиксированная сфера γ. В тот же двугранный угол вписывают сферы ω, касающиеся γ внешним образом. Докажите, что точки касания сферы ω и плоскости α лежат на одной окружности.

2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AB = CD$) вписанная в окружность ω. Лучи BA и CD пересекаются в P. На меньшей дуге AB окружности ω выбрана точка Q так, что PQ касается ω. Точка R произвольная точка на меньшей дуге AQ окружности ω. Прямые AR и BR пересекают PQ в точках Y и X соответственно. Оказалось, что окружность ω_1 с центром в X касающаяся QC и окружность ω_2 с центром в Y касающаяся QD не содержат точек A и B. Докажите, что можно провести касательную из A к ω_2 и из B к ω_1 так, чтобы они пересеклись на ω.

3. Пусть есть граф на $2n$ вершинах, в котором каждое ребро покрашено в синий или красный цвет. Синие рёбра образуют полное паросочетание, а красные рёбра образуют дерево, содержащее все вершины графа. Докажите, что найдётся цветочередующийся цикл (чётной длины).

4. Для действительного $1 < k < 2$ определим последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ следующим образом: $b_1 = 1$, $b_2 = k$ и $b_{n+2} = \dfrac{b_{n+1}^2 - 1}{b_n}$. Обязательно ли эта последовательность ограничена?

5. Целые числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ и $ab = 2cd$. Докажите, что $abcd = 0$.

6. Найдите все такие натуральные числа n, что для некоторого натурального $k \geq 2$ найдутся k положительных рациональных чисел, как сумма, так и произведение которых равно n.

7. Даны различные натуральные числа m и n. В клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены все натуральные числа по одному разу. Докажите, что на плоскости можно выделить два прямоугольника $m \times n$ (расположенных как угодно), в которых одно и то же наибольшее число.

8. В царстве «Сменяемость и Преемственность» имеется n кандидатов в депутаты парламента. Каждый год в стране выбирают парламент, состоящий из некоторых из этих кандидатов. В каждом из ранее избиравшихся парламентов должен быть ровно один депутат, которого не было в этом. Докажите, что это не может продолжаться больше n лет.

9. Дан выпуклый центрально-симметричный 22-угольник P с вершинами в узлах клетчатой бумаги. Известно, что в этом многоугольнике (внутри и на границе) лежит 2021 целая точка. Докажите, что P представим в виде суммы Минковского $A + B$ двух НЕ центрально-симметричных выпуклых многоугольников с вершинами в узлах.

   (Если фигуры задаются множествами радиус-векторов $\{\vec{a}\}$ и $\{\vec{b}\}$, то их сумма Минковского — фигура, которая задается множеством радиус-векторов $\{\vec{a} + \vec{b}\}$.)

10. Найдите наибольшее вещественное α, для которого существует возрастающая последовательность нечётных натуральных чисел $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \ldots$ со следующим свойством: для каждого n число a_n – наибольшее натуральное число, строго меньшее αa_{n+1}.