XVI ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Лицей «Сириус»

Высшая Старт-лига. Бой за 5-6 места.
Первая Старт-лига. 4 тур.
07.10.2021

1. На шахматной доске стоит поровну «двойных» и «недвойных» ладей. Каждая «двойная» ладья бьёт ровно две другие ладьи, а «недвойная» — сколько угодно, но не двух (возможно, 0). Какое наибольшее количество ладей может быть на доске?

2. Сколько существует шестизначных чисел, кратных шести и не содержащих в своей десятичной записи шестёрку?

3. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Докажите, что $AB > 2 \cdot (AC - BC)$.

4. Какое наименьшее ненулевое значение может принимать дробная часть дроби:
$$\frac{\text{Т} + \text{У} + \text{Р} + \text{Н} + \text{И} + \text{Р}}{\text{Ю} + \text{Ж} + \text{Н} + \text{Ы} + \text{Й}}?$$
Одинаковые буквы — одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Напоминаем, что $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x (целая часть), $\{x\} = x - [x]$ (дробная часть).

5. Натуральное число из различных цифр назовём *весёлым*, если для любого набора подряд идущих цифр их сумма делится на их количество. Найдите наибольшее *весёлое* число.

6. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 100×100 на равное количество прямоугольников 2×4 и 1×8?

7. В клетках таблицы 3×3 расставлены по разу все целые числа от 1 до 9 (по одному в клетке) так, что в каждой паре соседних (по стороне) клеток большее число составляет целое число процентов меньшего (например, 8 и 5 могут стоять рядом, так как 8 составляет 160% от 5, а 8 и 6 не могут). В каждой паре соседних чисел посчитали такой процент. *Балансом* таблицы назовём наибольшее из 12 получившихся чисел. Какой наименьший *баланс* может иметь таблица?

8. Назовем набор шариков *радующим глаз*, если в нём есть шарики трёх или более цветов. Имеется 100 шариков. Известно, что как ни раскладывай их на 25 наборов по 4 шарика, хотя бы один из наборов будет *радовать глаз*. Каково наименьшее количество цветов у этих 100 шариков?

XVI ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Лицей «Сириус»

Высшая Старт-лига. Полуфинал. 07.10.2021

1. Для положительных x, y, z, не превосходящих единицы, докажите неравенство
$$xyz + 2 \geq x + y + z.$$

2. Назовём треугольник *интересным*, если в нём есть медиана, длина которой больше длины стороны, к которой она проведена. На какое наименьшее количество *интересных* треугольников гарантированно можно разрезать произвольный треугольник?

3. На сторонах треугольника CDE во внешнюю сторону построены квадраты $ABCD$ и $DEFG$. Сравните BF и $AG + CE$.

4. Какое наименьшее ненулевое значение может принимать дробная часть дроби:
$$\frac{\text{Т} + \text{У} + \text{Р} + \text{Н} + \text{И} + \text{Р}}{\text{Ю} + \text{Ж} + \text{Н} + \text{Ы} + \text{Й}}?$$
Одинаковые буквы — одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Напоминаем, что $[x]$ *– наибольшее целое число, не превосходящее* x *(целая часть),* $\{x\} = x - [x]$ *(дробная часть).*

5. Натуральное число из различных цифр назовём *весёлым*, если для любого набора подряд идущих цифр их сумма делится на их количество. Пусть d – количество цифр в наибольшем *весёлом* числе. Сколько существует весёлых чисел длины d?

6. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 100×100 на равное количество прямоугольников 2×4 и 1×8?

7. В клетках таблицы 3×3 расставлены по разу все целые числа от 1 до 9 (по одному в клетке) так, что в каждой паре соседних (по стороне) клеток большее число составляет целое число процентов меньшего (например, 8 и 5 могут стоять рядом, так как 8 составляет 160% от 5, а 8 и 6 не могут). В каждой паре соседних чисел посчитали такой процент. *Балансом* таблицы назовём наибольшее из 12 получившихся чисел. Какой наименьший *баланс* может иметь таблица?

8. В одном из турниров отличников наук приняли участие n команд. Командам были предложены 6 задач. По итогам турнира выяснилось, каждая задача либо не решена, либо по ней команда подготовила частичное решение, либо задача решена полностью. Председатель жюри заметил, что для каждой пары команд количество задач, по которым у этих команд одинаковые продвижения, оказалось равно либо 0, либо 2. Найдите наибольшее возможное значение n.