XVI Южный математический турнир. «Лицей Сириус»

Гранд-лига. Финал. 08.10.2021.

1. Дано простое число p. Даны p различных строк $a_1, a_2, \dots, a_p$ длины p, состоящих из нулей и единиц, любые две из которых совмещаются циклическим сдвигом. Действительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ таковы, что линейная комбинация $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$ равна нулевой строке. Докажите, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

2. Дан треугольник ABC, в котором $AC = BC$, и точки P, Q. Прямые PA, PB пересекают биссектрису угла C в точках A_1, B_1. Прямые, проведённые через A_1 параллельно и через B_1 параллельно BC, пересекаются в точке O. Прямая PQ пересекает окружность Γ с центром O, проходящую через A_1, в точках T_1, T_2. На прямой PO отмечены точки K_1,K_2, такие, что $QK_1||OT_1$, $QK_2||OT_2$. Серединный перпендикуляр к AQ пересекает AC в точке A_2. Серединный перпендикуляр к Q пересекает BC в точке B_2. Прямая A_2K_1 пересекает BC в точке U, а прямая B_2K_2 пересекает AC в точке V. Докажите, что $UV||PO$.

3. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, H — его ортоцентр. Прямая A_1B_1 пересекает окружность (ABC) в точках X и Y. Докажите, что центр окружности (XHY) симметричен центру окружности описанной около (ABC) относительно точки C.

4. Разбиение выпуклого многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники назовём *прекрасным*, если после удаления любого треугольника ровно у одного из получившихся многоугольников оказывается нечётное число вершин. Докажите, что разбиение прекрасно тогда и только тогда, когда из него можно удалить часть диагоналей, получив разбиение исходного многоугольника на четырёхугольники.

5. Обозначим $r(x)$ расстояние от x до ближайшего целого числа. Даны числа $a > 1$ и $b \neq 0$ такие, что
$$\sum_{k=0}^{\infty} r(ba^k) < 1.$$
Докажите, что a является *алгебраическим* числом – т.е. корнем многочлена с целыми коэффициентами.

6. На доске написано n действительных положительных чисел. За один ход разрешается стереть любые два числа и заменить каждое из них их произведением. Найдите все значения n, для которых можно гарантированно получить набор одинаковых чисел на доске.

7. В графе нет полных подграфов на 4 вершинах и любые два треугольника имеют общую вершину. Любой индуцированный подграф этого графа, не содержащий треугольников, красится в k цветов правильным образом. Докажите, что весь граф тогда можно раскрасить в $k+1$ цвет правильным образом.

8. Существует ли такая последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots$, что $a_i \in (0; \frac{3}{4})$ и для любого натурального n числа $a_1, a_2, \dots a_n$ разбивают отрезок $[0; \frac{3}{4}]$ на отрезки длины не более $\frac{1}{n}$?

9. Докажите, что среди чисел 2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, $\dots$, 2^{3n} найдутся два, записи которых в троичной системе счисления имеют одинаковую сумму цифр.

10. Дано натуральное число n. Последовательность $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ действительных чисел называется *хорошей*, если $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_i^3 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_i)^2$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$. Докажите, что количество различных хороших последовательностей не больше чем $3^{n-1} + 2^{n-1}$. (Последовательности $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ считаются различными, если $x_i \neq y_i$ хотя бы для одного $i = 1, 2, \dots, n$.)