

Четвёртый тур. Бои за 5 и 7 места. Гранд. 26.09.2026.

1. Дано натуральное число  $n > 10$ . Найдите все натуральные  $k$ , для которых существуют натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$  такие, что число  $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}$  делится на  $2^n - 1$ , и никакие три из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$  не дают одинаковый остаток при делении на  $n$ .
2. Даны взаимно простые натуральные числа  $a > b \geq 2$ . Отметим все точки с целыми координатами, лежащие строго внутри треугольника с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$  и  $(0, b)$ . В каждую отмеченную точку  $(x, y)$  запишем число  $(a - 2x)(b - 2y)$ . Найдите сумму всех записанных чисел.
3. По кругу расставлены 99 ненулевых вещественных чисел, причём сумма любых двух соседних чисел неотрицательна. Обозначим сумму всех 99 чисел через  $S$ , а сумму их модулей — через  $M$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $S/M$ .
4. В треугольнике  $ABC$  точка  $I$  — центр вписанной окружности. Биссектриса  $AI$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$ , а описанную окружность треугольника  $ABC$  — в точке  $N \neq A$ . На отрезке  $CN$  взята такая точка  $E$ , что  $EN = DN$ . Окружности, описанные около треугольников  $ADB$  и  $AIC$ , пересекаются повторно в точке  $F \neq A$ . Докажите, что  $BC$  — биссектриса угла  $FBE$ .
5. Учитель выписал на доску несколько (хотя бы два) различных положительных чисел. Петя записал к себе в тетрадку квадраты этих чисел. Вася выбрал многочлен вида  $P(x) = x^2 + ax + b$  и записал к себе в тетрадку значения  $P(x)$  во всех числах учителя. Оказалось, что число записано у Пети тогда и только тогда, когда оно записано у Васи. Докажите, что  $P(x)$  имеет ровно один вещественный корень.
6. Нарисован правильный 100-угольник. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход Петя записывает произвольное вещественное число в одну свободную вершину; числа могут повторяться. Вася за ход ставит на сторону, на которой ещё нет знака, знак  $>$  или  $<$ , указывающий, число в каком из её концов должно быть больше. Ставить знак разрешается, даже если числа в одном или обоих концах стороны ещё не записаны. Записанные числа и поставленные знаки изменять нельзя. Игра заканчивается, когда знаки стоят на всех сторонах. Какое наибольшее количество верных неравенств Петя может гарантировать независимо от действий Васи?
7. Найдите наибольшее  $k$ , при котором существует такое натуральное  $N$ , что при всех  $n \geq N$  верно следующее утверждение: В любом связном графе на  $n$  вершинах, все степени которых равны 3, найдётся простой цикл длины хотя бы  $k$ .
8. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Пусть  $\ell_1$  и  $m_1$  — касательные к  $\omega_1$ , а  $\ell_2$  и  $m_2$  — касательные к  $\omega_2$ . Известно, что прямые  $\ell_1$  и  $m_2$  пересекаются на луче  $AB$ , и прямые  $\ell_2$  и  $m_1$  также пересекаются на луче  $AB$ . Кроме того, известно, что  $\ell_1 \parallel \ell_2$  и  $m_1 \parallel m_2$ . Докажите, что точки касания прямых  $\ell_1$  и  $m_1$  с  $\omega_1$  вместе с точками касания прямых  $\ell_2$  и  $m_2$  с  $\omega_2$  лежат на одной прямой.