

Полуфинал. Гранд. 26.09.2026.

1. Дано натуральное число $n > 10$. Найдите все натуральные k , для которых существуют натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_k$ такие, что число $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}$ делится на $2^n - 1$, и никакие три из чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ не дают одинаковый остаток при делении на n .
2. Вершины ориентированного графа G расположены в 10 строках и 1000 столбцах, по одной вершине в каждой позиции. Каждая вершина, кроме вершин последнего столбца, имеет ровно три исходящих ребра к трём различным вершинам следующего столбца; в каждую вершину, кроме вершин первого столбца, входят ровно три ребра из трёх различных вершин предыдущего столбца. Других рёбер в графе нет. В каждую вершину v последнего столбца поставлено некоторое число $q(v) \in [0, 1]$. В остальные вершины числа ставятся по следующему правилу: если из вершины u выходят рёбра в вершины a, b и c , то

$$q(u) = \frac{q(a) + q(b) + q(c)}{3}.$$

На каждом ребре, соединяющем вершины u и v , поставлено число $|q(u) - q(v)|$. Докажите, что сумма чисел на всех рёбрах не превосходит 150.

3. Найдите все тройки многочленов с вещественными коэффициентами $P(x), Q(x), R(x)$, степени которых не меньше 2, удовлетворяющие при всех x равенству

$$P(Q(x) + R(x)) = P(Q(x)) + P(R(x)).$$

4. Внеписанные окружности касаются сторон AB и AC неравнобедренного треугольника ABC в точках C_1 и B_1 соответственно. Пусть AM и AL — соответственно медиана и биссектриса этого треугольника, а I — центр вписанной в него окружности. Известно, что точки M, L, B_1 и C_1 лежат на одной окружности. Найдите все возможные значения AI/IL .
5. Учитель выписал на доску несколько (хотя бы два) различных положительных чисел. Петя записал к себе в тетрадку квадраты этих чисел. Вася выбрал многочлен вида $P(x) = x^2 + ax + b$ и записал к себе в тетрадку значения $P(x)$ во всех числах учителя. Оказалось, что число записано у Пети тогда и только тогда, когда оно записано у Васи. Докажите, что $P(x)$ имеет ровно один вещественный корень.
6. Пусть $n \geq 5$ — натуральное число. Нарисован правильный n -угольник. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход Петя ставит на сторону, на которой ещё нет знака, знак $>$ или $<$, указывающий, число в каком из её концов должно быть больше. Ставить знак разрешается, даже если числа в одном или обоих концах стороны ещё не записаны. Вася за ход записывает произвольное вещественное число в одну свободную вершину; числа могут повторяться. Записанные числа и поставленные знаки изменять нельзя. Игра заканчивается, когда числа стоят во всех вершинах. Какое наибольшее количество верных неравенств Вася может гарантировать независимо от действий Пети?
7. Найдите наибольшее k , при котором существует такое натуральное N , что при всех $n \geq N$ верно следующее утверждение: В любом связном графе на n вершинах, все степени которых равны 5, найдётся простой цикл длины хотя бы k .
8. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность Ω , пересекаются в точке P . Пусть C_B и C_D — точки, симметричные точке C относительно прямых AB и AD соответственно; аналогично, пусть A_B и A_D — точки, симметричные точке A относительно прямых CB и CD соответственно. Касательная к Ω в точке C пересекает прямую $C_B C_D$ в точке C' , а касательная к Ω в точке A пересекает прямую $A_B A_D$ в точке A' . Докажите, что прямая $A'C'$ проходит через P .
9. Пусть A — множество всех положительных рациональных чисел, не превосходящих 1. Существует ли ограниченная функция $f: A \rightarrow [1, +\infty)$, принимающая каждое значение не более одного раза и такая, что для каждого $a \in A$ число $f(a)/a$ — натуральное?
10. На плоскости дана ломаная $A_1 A_2 \dots A_{2025}$, все звенья которой имеют единичную длину. Известно, что для каждого $i = 2, 3, \dots, 2023$ звенья $A_{i-1} A_i$ и $A_{i+1} A_{i+2}$ лежат по одну сторону от прямой $A_i A_{i+1}$. Известно, что

$$\angle A_1 A_2 A_3 + \angle A_3 A_4 A_5 + \dots + \angle A_{2023} A_{2024} A_{2025} = 60^\circ$$

и

$$\angle A_2 A_3 A_4 + \angle A_4 A_5 A_6 + \dots + \angle A_{2022} A_{2023} A_{2024} = 300^\circ.$$

Докажите, что $A_1 A_{2025} < 1$.