

Двадцать первый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 20–28.09.2026

Юниор–лига первая. 4 тур. 26.09.2026

1. В классе $4n$ учеников. В один прекрасный вечер каждый из них позвонил своим одноклассникам, причем никто никому не звонил дважды. В результате оказалось, что первый ученик поучаствовал в одном разговоре, второй – в двух, третий – в трёх, ..., последний – в $4n$ разговорах. Найдите наименьшее возможное число пар учеников, разговаривавших друг с другом (хотя бы один раз).

2. Дан правильный 100-угольник. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход Петя ставит на сторону, на которой ещё нет знака, знак $>$ или $<$, указывающий, число в каком из её концов должно быть больше. Ставить знак разрешается, даже если числа в одном или обоих концах стороны ещё не записаны. Вася за ход записывает произвольное вещественное число в одну свободную вершину; числа могут повторяться. Записанные числа и поставленные знаки изменять нельзя. Игра заканчивается, когда числа стоят во всех вершинах. Какое наибольшее количество верных неравенств Вася может гарантировать независимо от действий Пети?

3. В остроугольном треугольнике ABC с $AC > AB$ отрезок AD – высота, точки H и O – ортоцентр и центр описанной окружности соответственно, N – середина отрезка OH . На отрезке BD выбрана точка P такая, что $\angle PND = 2\angle PAD$. Докажите, что прямая BC касается описанной окружности треугольника AOP .

4. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 2026$. За один ход можно заменить любое число на доске на (положительную) разность между наибольшим и наименьшим числами, находящимися на доске в данный момент. За какое наименьшее количество ходов можно сделать все числа на доске равными?

5. В треугольнике ABC с углом $\angle BAC = 60^\circ$ провели медиану AM , биссектрису AL и высоту AH . Докажите, что $HL < 3LM$.

6. Найдите все пары натуральных чисел (n, p) , где p – простое, такие, что

$$n! + 1 = (pn + 1)^2.$$

7. Положительные числа a , b и c удовлетворяют условиям

$$\sqrt{ab + 1} + \sqrt{ca + 1} = 2a,$$

$$\sqrt{bc + 1} + \sqrt{ab + 1} = 3b,$$

$$\sqrt{ca + 1} + \sqrt{bc + 1} = 5c.$$

Найдите a .

8. Даны взаимно простые целые числа $a, b \geq 2$. Обозначим через S множество всех точек с целыми координатами, лежащих строго внутри треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(a, 0)$ и $(0, b)$. Найдите

$$\sum_{(x,y) \in S} (a - 2x)(b - 2y).$$