

Двадцать первый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 20–28.09.2026

Юниор-лига 2. 4 тур. 26.09.2026

1. Какие натуральные числа нельзя представить в виде суммы трёх различных натуральных чисел  $a, b, c$  таких, что  $a < b < c$  и  $b : a$ , а  $c : b$ ?

2. На диагонали  $BD$  квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $BED$  (точка  $C$  лежит внутри треугольника). Точка  $M$  – середина  $DE$ . Найдите угол между прямыми, содержащими отрезки  $MC$  и  $BE$ .

3. В треугольнике  $ABC$  провели медиану  $AM$ , биссектрису  $AL$  и высоту  $AH$ . Известно, что  $\angle BAC = 60^\circ$ . Докажите, что  $HL < 3LM$ .

4. Найдите все пары натуральных чисел  $(n, p)$ , где  $p$  – простое, такие, что

$$n! + 1 = (pn + 1)^2.$$

5. Дан правильный 100-угольник. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход Петя записывает произвольное вещественное число в одну свободную вершину (числа могут повторяться). Вася за ход ставит на сторону, на которой ещё нет знака, знак « $>$ » или « $<$ ». Ставить знак на стороне разрешается, даже если числа на одном или обоих её концах ещё не записаны. Записанные числа и поставленные знаки изменять нельзя. Игра заканчивается, когда знаки стоят на всех сторонах. Какое наибольшее количество верных неравенств Петя может гарантировать независимо от действий Васи?

6. Найдите наименьшее натуральное  $n$ , для которого квадрат  $n \times n$  можно разрезать на четыре одинаковые **связные** клетчатые фигуры, причём периметр каждой из четырёх частей равен периметру исходного квадрата.

7. Действительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a + b + c = 8, \\ a^2 + ac = b^2 + bc + 8, \\ b^2 + ab = c^2 + ac + 16. \end{cases}$$

Найдите  $abc$ .

8. На доску выписаны все составные числа от 1 до 30. Можно ли стереть 3 числа и оставшиеся разбить на три группы так, чтобы произведения всех чисел в каждой из групп были равны?