

XXI Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига. Полуфинал. 26.09.2026

1. В квадрате 100×100 клетки закрашивают одну за другой. Сначала можно закрасить любую клетку. Каждая следующая клетка должна примыкать к уже закрашенной области ровно одной стороной и не иметь с этой областью никаких других общих точек. Какое наибольшее количество клеток можно закрасить?

2. Докажите, что натуральное число a является точным квадратом тогда и только тогда, когда для любого натурального b найдётся натуральное c , для которого число $a + bc$ является точным квадратом.

3. Число 2026 записали подряд несколько раз (не менее двух), а затем между какими-то двумя соседними цифрами этого числа вставили одну цифру. Могло ли полученное после этого число (в десятичной записи) являться точным квадратом?

4. Назовём средней линией четырёхугольника отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон. В выпуклом четырёхугольнике проведены обе диагонали и обе средние линии. Докажите, что из этих четырёх отрезков всегда можно выбрать три, из которых можно составить треугольник.

5. В квадрате $ABCD$ точка M — середина стороны AB . Точка P — проекция точки B на прямую CM . Пусть N — середина отрезка CP . Биссектриса угла DAN пересекает отрезок DP в точке Q . Докажите, что $BMQN$ — параллелограмм.

6. Вещественные числа x, y, z таковы, что $x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2$. Докажите, что в выражении $x * y * z$ вместо звёздочек можно поставить плюсы и минусы так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю.

7. Дан правильный 100-угольник. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход Петя записывает произвольное вещественное число в одну свободную вершину; числа могут повторяться. Вася за ход ставит на сторону, на которой ещё нет знака, знак $>$ или $<$, указывающий, число в каком из её концов должно быть больше. Ставить знак разрешается, даже если числа в одном или обоих концах стороны ещё не записаны. Записанные числа и поставленные знаки изменять нельзя. Игра заканчивается, когда знаки стоят на всех сторонах. Какое наибольшее количество верных неравенств Петя может гарантировать независимо от действий Васи?

8. Найдите все пары натуральных чисел (n, p) , где p — простое, такие, что $n! + 1 = (pn + 1)^2$.

XXI Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига. Бои за 5–6 и 7-10 места. 26.09.2026

1. Найдите наименьшее n , для которого квадрат $n \times n$ можно разрезать на четыре одинаковые **связные** клетчатые фигуры, причём периметр каждой из четырёх частей равен периметру исходного квадрата.

2. Шесть положительных целых чисел записаны по кругу. Выписали суммы чисел во всех группах из 1, 2, 3, 4 и 5 подряд идущих чисел, а также сумму всех шести чисел. Полученные суммы — всего их 31 — оказались в некотором порядке равны числам $1, 2, \dots, 31$. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из шести чисел?

3. Найдите все пары натуральных чисел (n, p) , где p — простое, такие, что $n! + 1 = (pn + 1)^2$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что трёх отрезков с длинами KM, LN и AC можно составить треугольник.

5. На доске 8×8 отмечено 38 клеток. Известно, что на отмеченных клетках можно расставить 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что это можно сделать не менее чем четырьмя способами.

6. Действительные числа a, b, c удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a + b + c = 8, \\ a^2 + ac = b^2 + bc + 8, \\ b^2 + ab = c^2 + ac + 16. \end{cases}$$

Найдите abc .

7. Число 2026 записали подряд несколько раз (не менее двух), а затем между какими-то двумя соседними цифрами этого числа вставили одну цифру. Могло ли полученное после этого число (в десятичной записи) являться точным квадратом?

8. В квадрате $ABCD$ точка M — середина стороны AB , а P — проекция точки B на прямую CM . Точка N — середина отрезка PC . Докажите, что биссектриса угла NAD делит отрезок ND пополам.